2021 IMO

樊普

July 2021

题 1. 设整数 $n \geq 100$。伊凡把 $n, n+1, \cdots, 2n$ 的每个数写在卡片上，然后他将这 $n+1$ 个数打乱顺序并分成两堆。证明：至少有一堆中包含两张卡片，使得这两张卡片上的数之和时一个完全平方数。

证明. 首先，这 $n+1$ 个数两两求和范围在 $[2n+1, 4n-1]$ 内，这个区间内的平方数与 $[\sqrt{2n+1}, \sqrt{4n-1}]$ 内的整数个数相同，后者为 $[\sqrt{4n-1}] - \lceil\sqrt{2n+1}\rceil + 1$。

记这个数为 A，$A \geq \sqrt{4n-1} - 1 - \sqrt{2n+1} > 4$，所以至少有 5 个连续自然数的平方在这个区间内，记为 $x^2, (x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2, (x+4)^2$。

若 $n \in [100, 126]$，取 $i = 163, j = 126, k = 198$。

若 $n \geq 127$，$A \geq \sqrt{4n-1} - 1 - \sqrt{2n+1} > 6$，所以至少有 7 个连续自然数的平方在这个区间内，记为 $x^2, (x+1)^2, \cdots, (x+6)^2$，$x+2$ 与 $x+3$ 中有一奇数，记为 y，记 $i = \frac{(y+1)(y+5)}{2}, j = \frac{y^2+2y+3}{2}, k = \frac{y^2-2y-3}{2}$，两两和为平方数。 □

题 2. 对任意实数 $x_1, \cdots, x_n$，证明下述不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

证明. 归纳。

注意到 x_i 同时加减 d，左式不变。

记 n^2 个和 $\{x_i + x_j\}$ 为 $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_m$，考虑函数 $f(x) = \sum_{k=1}^{m}\sqrt{|p_k - x|}$。明显的，对每个 $\sqrt{|p-x|}$，在每个区间 (p_i, p_{i+1}) 内，它的导数都是关于 x 的单减函数，所以 f 有三种情况: 增，先增后减，减，所以 f 取最小值一定在端点处，即某个 p_i 处。

从而存在某个数 d，使得 $f(2d)$ 最小。即每个 x_i 调整为 $x_i - d$，右侧达到最小值，调整后使得有一个 $x_i + x_j = 0$。

若 $i \neq j$，则不妨 $i = n, j = n-1, x_n = -x_{n-1} = y$，式子变为

$$\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}\sqrt{|x_i + x_j|} + \sqrt{|2y|}$$

若 $i = j$，不妨 $i = j = n$，式子变为:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

两个都是归纳假设。 □

题 3. 设 D 是锐角三角形 $ABC(AB > AC)$ 内部一点，使得 $\angle DAB = \angle CAD$，线段 AC 上的点 E 满足 $\angle ADE = \angle BCD$，线段 AB 上的点 F 满足 $\angle FDA = \angle DBC$，且直线 AC 上的点 X 满足 $CX = BX$，设 O_1, O_2 分别为三角形 ADC 和三角形 EXD 的外心，证明：直线 BC, EF, O_1O_2 共点

证明. 没搞定,po 一个 AOPS 的链接https://artofproblemsolving.com/community/c6t360f6h2625862_geometry_geometry_geometry. □

题 4. *设圆 Γ 的圆心为 I. 凸四边形 $ABCD$ 满足: 线段 AB,BC,CD 和 DA 都与 Γ 相切. 设 Ω 是三角形 AIC 的外接圆.BA 往 A 方向的延长线交 Ω 于点 X,BC 往 C 方向的延长线交 Ω 于点 Z,AD 往 D 方向的延长线交 Ω 于点 Y,CD 往 D 方向的延长线交 Ω 于点 T. 证明:$AD+DT+TX+XA=CD+DY+YZ+ZC$.*

证明. 由题有如下性质: $AB+CD=AD+BC,\widehat{IT}=\widehat{IZ},\widehat{IX}=\widehat{IY}$。

从而有 $\widehat{TX}=\widehat{YZ}$, 故只需证:$AD+DT+XA=CD+DY+ZC$。

两边同时加 $BC+AB$, 得只需证 $DT+XB=DY+BZ$。

等价于 $DY-DT=BX-BZ$

由四点共圆带来的相似, 有 $\frac{DY}{DT}=\frac{DC}{DA},\frac{BX}{BZ}=\frac{BC}{BA}$, 从而 $\frac{DY-DT}{DT}=\frac{DC-DA}{DA},\frac{BX-BZ}{BZ}=\frac{BC-BA}{BA}$, 由于 $DC-DA=BC-BA$, 故只需证 $\frac{DT}{DA}=\frac{BZ}{BA}$。

这等价于 $\frac{\sin\angle TAY}{\sin\angle ATC}=\frac{\sin\angle XAZ}{\sin\angle AZC}$, 明显上下两个正弦函数分别相等。 □

题 5. *两只松鼠 B 和 J 为过冬收集了 2021 枚核桃. J 将核桃依次编号为 1 到 2021, 并在它们最喜欢的树周围挖了一圈共 2021 个小坑. 第二天早上, J 发现 B 已经在每个小坑里放入了一枚核桃, 但并未注意编号. 不开心的 J 决定用 2021 次操作来改变这些核桃的位置. 在第 k 次操作中, J 把与第 k 号核桃相邻的两枚核桃交换位置. 证明: 存在某个 k, 使得在第 k 次操作中, J 交换了两枚编号为 a 和 b 的核桃, 且 $a<k<b$.*

证明. 反证法, 如果每次操作移动的核桃被操作时的周围的核桃都比它大或者小, 两种核桃集合记为 A, B。

如果某个核桃 $x\in B$, 那么这个核桃被操作后不会被移动, 因为周围两个核桃都已经被操作过了, 如果之后出现某个操作（不妨为第 k 次, $k>x$）后, 它周围的一个核桃 y 变成了一个未被操作的核桃 z, 取最早的那次, 这说明 z,k,y 在操作前以这个顺序或者倒序相邻, 由于 $z>k$, 从而 $y>k$, 所以 y 也未被操作过, 所以在这之前 x 周围就有未被操作的核桃, 此时最早矛盾。

这同时也说明, 如果一个 B 内的核桃 x 操作的时候, 它周围的一定是 A 内的核桃, 因为它周围都是操作过的核桃, 而操作过的 B 内的核桃位置不会变动。并且 x 周围将来一定都会是 A 中的核桃, 这是因为若 x 某时刻（同样不妨为第 k 次, $k>x$）周围的 A 中的核桃 y 变为了 B 中的核桃 z, 由上 z 是被操作过的, 但是 z 被变动了, 与 z 在 B 中第 z 次操作后不会变动矛盾。

如果第 x 次操作时, x 的周围是一个 A 中的核桃 y 和一个 B 中的核桃 z, 首先由上 $x\in A$, 所以 $y>x,z>x$, 在操作 x 后操作 y 前, 如果有一个操作 r ($x<r<y$) 使得 r 把 x 从 y 身边换走了, 则 $r\in B$, 从而 x 被换后的数 x' 依然由 $x'<r<y$, 这说明无论如何在 y 被操作前, 它身边一直会有一个比它小的数, 第 y 次操作时, y 不可能在 A 中, 矛盾。

上述结果说明, 每次操作, B 的内部的核桃所在的位置都不变, 如果在操作完成后时光回溯在最开始把 B 的数涂成蓝色, 那么所有蓝色所站的坑的集合从一开始就没有变过, 从而 A 的坑的集合就是蓝色的补集也没有变过, 将这些位置涂成红色。

由于 2021 是奇数, 必然有连续两个以上同色的情况, 由于蓝色的坑周围的坑最后一定都是 A 中的数, 故只能为有连续两个以上红色相连, 在某个边界处, 由上讨论, 在这个坑的位置不可能被操作, 即任意 x, 第 x 次操作时 x 一定不在这个坑, 否则会出现 A,B 位置交换的情况。

在最开始, 这个坑的数是没有被操作的, 在最后, 这个位置的数被操作过了, 从而存在一次最早的操作 k, 使得这个坑从一个没有被操作的核桃 x 变成了被操作的核桃 y, 即有 $y<k,k<x$, 但是这是矛盾的, 因为 k 操作前夹在 x 和 y 的中间, 推出 k 既不在 A 中也不在 B 中。 □

题 6. 设整数 $m \geq 2$，设集合 A 由有限个整数（不一定为正）构成，且 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 是 A 的子集，假设对任意 $k = 1, 2, \cdots, m$，B_k 中的元素和为 m^k，证明：A 至少包含 $m/2$ 个元素。

证明. 考虑到 m 进制，记 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则对 $[1, m^{m+1} - 1]$ 内的所有 m 的倍数都可以表示为一个形如 $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i$ 的和，其中 $0 \leq a_i \leq (m-1)m$，m 的倍数有 $m^m - 1$ 个，形式和有 $(m^2 - m + 1)^n$ 个，从而有 $m^{2n} > m^m - 1$，故 $n \geq m/2$。 □