数理逻辑

授课教师:林作铨　　课程主页

2021 秋

- 成绩期末 + 作业（20-30%）
- 讲义
- 参考教材

  - Logic for Mathematicians

  - Hamilton A G，清华大学出版社（影印版），2003

  - Introduction to Mathematical Logic (6th ed)

  - Mendelson E，CRC press，2015

- 参考书

  - John Bell, Moshe Machover, A Course In Mathematical Logic, North Holland, 1977

  - Jean Gallier, Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving, John Wiley and Sons, 1988

- 经典书

  - Alonzo Church, Introduction to Mathematical Logic (Vol.1), Princeton University Press, 1951/1996

- 中文书

  - 胡世华，陆钟万，数理逻辑基础（上、下册），科学出版社，1982

  - 莫绍揆，数理逻辑导论，上海科学技术出版社，1965

- 更多阅读

  - 王浩，数理逻辑通俗讲话，科学出版社，1981

  - Jean van Heijenoort, From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931, Harvard University Press, 2002

- 科普书

  - Ernest Nagel, James R. Newman, (Douglas R.Hofstadter), Gödel’s Proof, NYU Press, 1971 (Revised edition, 2001)

  - 哥德尔证明，陈东威，连永君译，中国人民大学出版社，2008

  - Douglas R. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid, Basic Books, 1979/1999

  - 哥德尔 · 艾舍尔 · 巴赫——集异璧之大成，北大翻译组，1997/2010

目录

0 引言

定义 0.1 (数理逻辑的主要内容)**.** 逻辑演算（一阶逻辑）+ 四论（证明论/模型论/递归论/形式集论），逻辑演算是数理逻辑的基础，亦称经典逻辑。

注 0.2. 数学基础三大学派：逻辑主义，形式主义，直觉主义; *Bourbaki* 学派：结构主义

悖论 0.3 (罗素悖论)**.** 参考百度百科，数学的第三次危机。

注 0.4. 数学的第三次危机仍未解决。

1 命题逻辑：语义

1.1 命题和连接符

定义 1.1 (命题)**.** 具有真假意义的判断性或陈述性的语句称为命题（proposition），或称语句（statement）。

定义 1.2 (真值)**.** 命题的真假意义称为命题的真值（truth values）；当一个命题为真时，称它的真值为“真”（true），记为 T（或 1）；当一个命题为假时，称它的真值为“假”（false），记为 F（或 0）；

悖论 1.3 (说谎者悖论)**.** “这个句子是假的”不是命题，称之悖论（*paradox*）：一种导致自相矛盾的陈述：

- 设 P 表示“这个句子是假的”
- 若 P 为真，即“这个句子是假的”为真 $\Rightarrow P$ 为假
- 若 P 为假，即“这个句子是假的”为假 $\Rightarrow P$ 为真

注 1.4 (说谎者悖论扩展版本)**.**

1. 下个句子为真
2. 上个句子为假

悖论 1.5.

- “上帝能创造一块他搬不动的石头”
- “世界上没有绝对的真理”
- “我只知道一件事，那就是什么都不知道”（苏格拉底）
- “言尽悖”（庄子 · 齐物论）

注 1.6. 悖论通常是自指的。

定义 1.7 (命题符号)**.** 命题分为两类

- 简单命题（原子（命题）(atom)）：不能进一步分解的命题，简单命题用大写字母 A，B，C（可加下标）等来表示，

  例：用 A 表示命题“Perelman 解决了庞加莱猜想问题”；用 B 来表示“庞加莱猜想成为数学定理”

- 复合命题：由简单命题复合而成的命题，对复合命题，需要使用（逻辑）连接符（连接词、联词）（connective）来构成

定义 1.8 (连接符).

- 非 A (not A) : $\sim A$
- A 且 B (A and B) : $A \wedge B$
- A 或 B (A or B) : $A \vee B$
- 若 A 则 B (if A then B) : $A \to B$
- A 当且仅当 B (A if and only if B) : $A \leftrightarrow B$

1.2 真值表

命题 1.9 (否定的真值表与真值函数). *真值函数（bool 函数）为 $f^{\sim}(T) = F, f^{\sim}(F) = T$ 或 $f^{\sim}(1) = 0, f^{\sim}(0) = 1$，对应的真值表为*

p	$\sim p$
T	F
F	T

命题 1.10 (且的真值表与真值函数). *真值函数 (bool 函数) 为 $f^{\wedge}(T,T) = T, f^{\wedge}(F,F) = F, f^{\wedge}(T,F) = f^{\wedge}(F,T) = F$，对应的真值表为*

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

命题 1.11 (或的真值表与真值函数). *真值函数 (bool 函数) 为 $f^{\vee}(T,T) = T, f^{\vee}(F,F) = F, f^{\vee}(T,F) = f^{\vee}(F,T) = T$，对应的真值表为*

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

命题 1.12 (条件的真值表与真值函数). *真值函数 (bool 函数) 为 $f^{\to}(T,T) = T, f^{\to}(F,F) = T, f^{\to}(T,F) = F, f^{\to}(F,T) = T$，对应的真值表为*

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

定义 1.13 (命题形式). 命题形式是指按下列规则构成的包含（命题）变元和（逻辑）连接符的表达式：

(1) 任一变元是一个命题形式；

(2) 若 A 和 B 是命题形式，则 $(\sim A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ 都是命题形式（所有命题形式由 (1)(2) 构成）。

注 1.14.

- *括号 "(" ")" 作为技术性符号使用，不易混淆，在不引起混淆的情况下尽可省略*
- *理论上，技术性符号不是必要的*

  ——只要把中置式（如 $p \wedge q$）写成前置式（$\wedge pq$）

  ——连接符优先按 $\sim, \wedge\vee, \to\leftrightarrow$ 降序（类似算术先乘除后加减）

  ——重新添加括号按同样连接符优先序
- *为方便可引入其它技术性符合，如 "$\cdot\,\cdot$" 等，但都不是必要的*

定义 1.15 (真值指派). 对一个命题形式所含变元分别赋予 T 或 F 值称为一组真值指派（assignment）

定义 1.16. 设 $\mathscr{A}$ 是一个命题形式，若对 $\mathscr{A}$ 中的变元存在（至少）一组真值指派，使得 $\mathscr{A}$ 的真值为 T，则称 $\mathscr{A}$ 是可满足的

定义 1.17 (SAT 问题). SAT 问题（SAT isfiability，可满足性问题）是判定一个命题形式是否可满足的问题（寻找一个算法在多项式时间内判定任一命题形式可满足）

注 1.18.

- *$P = NP$ 问题是计算机科学和数学的未解难题*
- *SAT 问题若能解决，就解决了 $P = NP$ 问题（$Cook$ 定理）*
- *大量应用问题本质上可转化为 SAT 问题，已成专门的研究领域*
- *命题逻辑具有独特的价值（不只是作为一阶逻辑的基础）*

定义 1.19. 设 A 是一个命题形式

(1) 若对 A 中变元的任一组真值指派，A 的真值都为 T，则称 A 是**重言式**（tautology，或恒真）

(2) 若对 A 中变元的任一组真值指派，A 的真值都为 F，则称 A 是***矛盾（式）***（contradiction，或恒假、不一致 (inconsistent)）

作业 1

1. 把下列复合命题符号化：

(a) 若需求保持不变且价格增加，则营业额一定下降了。

(b) 如果琼斯没有被选为党的领袖，那么史密斯和罗宾逊中有一个将离开内阁，我们将在选举中失败。

(c) 若 y 是一个整数，则 z 不是实数，已知 x 是一个有理数。

2. 如果我们采用 "$A \vee B$" 表示 "A or B but not both"，则 "A or B or both" 如何表示？3. 给出下列命题形式的真值表：

(a) $\sim (p \to q) \to \sim (q \to p)$

(b) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

4. 证明命题形式 $((\sim p) \to (q \vee r))$ 与 $((\sim q) \to ((\sim r) \to p))$ 有相同的真值函数。5. 下列命题形式中哪些是重言式?

(a) $((q \vee r) \to ((\sim r) \to q))$

(b) $((p \to (q \to r)) \to ((p \wedge (\sim q)) \vee r))$

6. 证明下列命题形式对是逻辑等价的：

(a) $(p \to q), (\sim p \vee q)$

(b) $((p \vee q) \wedge r), ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

7. 证明命题形式 $(((\sim p) \to q) \to (p \to (\sim q)))$ 不是重言式。找出命题形式 A 和 B 使得 $(((\sim A) \to B) \to (A \to (\sim B)))$ 是一个矛盾式。
8.

(a) 给出 Russell（集合）悖论，并论证之。

(b) “我明天这个时候说的这句话是假的”，这个句子是悖论吗?

定义 1.20 (逻辑隐含与逻辑等价). 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 都是命题形式:

(1) 若 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是重言式，则称 $\mathscr{A}$ 逻辑隐含 $\mathscr{B}$

(2) 若 $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ 是重言式，则称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 逻辑等价，或称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 等值，记为 $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$

注 1.21 (构造真值表的方法). *对较复杂的命题形式，可用如下方法来构造真值表：*

(1) 在命题变元的下面列出所有的真值组合

(2) 按照括号从内到外的次序给出每层括号内的连接符对应的真值

$((\sim$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$\leftrightarrow$	$((\sim$	$p)$	$\vee$	$(\sim$	$q)))$
F	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	F

表 1: 例

1.3 操作和替换规则

命题 1.22. *设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是命题形式，若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 都是重言式，则 $\mathscr{B}$ 也是重言式。*

证明. 若 $\mathscr{B}$ 不是重言式，则存在一组真值指派使得 $\mathscr{B}$ 取值为 F，且 $\mathscr{A}$ 取值为 T，此时 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 取值为 F，矛盾。 □

定义 1.23 (替换). 设 $\mathscr{A}$ 是含有变元 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的命题形式，$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n$ 是任意的命题形式，$\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 是分别用 $\mathscr{A}_i$ 替换 $p_i (1 \le i \le n)$ 的所有出现得到的命题形式。

命题 1.24. *若 $\mathscr{A}$ 为重言式，则 $\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 也是重言式。*

定义 1.25 (替换实例). $\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个替换实例。

命题 1.26. 对任意命题形式 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$，有

$$\sim(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})\equiv\sim\mathscr{A}\vee\sim\mathscr{B},\quad \sim(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\equiv\sim\mathscr{A}\wedge\sim\mathscr{B}$$

命题 1.27. 设 $\mathscr{A}_1$ 是含有 $\mathscr{A}$ 的命题形式，$\mathscr{B}_1(\mathscr{A}_{1\mathscr{A}/\mathscr{B}})$ 是用命题形式 $\mathscr{B}$ 替换 $\mathscr{A}_1$ 中的 $\mathscr{A}$ 一次或多次所得到的命题形式，如果 $\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{A}$ 等值，则 $\mathscr{B}_1\equiv\mathscr{A}_1$

定义 1.28 (受限命题形式). 受限（或 0 阶）命题形式，是指只含有连接符 $\sim,\wedge,\vee$ 的命题形式。

命题 1.29. 设 $\mathscr{A}$ 是受限命题形式，令 $\mathscr{A}^*$ 是通过如下方式所得的命题形式

(1) 互换 $\mathscr{A}$ 中的 $\wedge,\vee$；

(2) 对 $\mathscr{A}$ 中的任意命题变元，用其否定式替换该命题变元在 $\mathscr{A}$ 中所有的出现

则 $\mathscr{A}^*$ 与 $\mathscr{A}$ 逻辑等价。

证明. 对 $\mathscr{A}$ 中连接符的数量进行归纳证明。 □

定理 1.30 (DeMorgan 律). 若 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n$ 是任意命题形式，则

(1)$\vee_{i=1}^n(\sim\mathscr{A}_i)\equiv\sim(\wedge_{i=1}^n\mathscr{A}_i)$

(2)$\wedge_{i=1}^n(\sim\mathscr{A}_i)\equiv\sim(\vee_{i=1}^n\mathscr{A}_i)$

定理 1.31.

1. $\sim(\mathscr{A}\wedge\sim\mathscr{A})$ （无矛盾律）
2. $\mathscr{A}\vee\sim\mathscr{A}$ （排中律）
3. $\mathscr{A}\equiv\sim\sim\mathscr{A}$ （双重否定律）
4. $\mathscr{A}\equiv\mathscr{A}\wedge\mathscr{A},\quad \mathscr{A}\equiv\mathscr{A}\vee\mathscr{A}$ （同幂律或重言律）
5. $(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})\to\mathscr{C}\equiv\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$ （赎出律）
6. $\mathscr{A}\to\mathscr{B}\equiv\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{A}$ （换位律）
7. DeMorgan 律
8. $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\equiv\mathscr{B}\wedge\mathscr{A},\quad \mathscr{A}\vee\mathscr{B}\equiv\mathscr{B}\vee\mathscr{A}$ （交换律）
9. $\mathscr{A}\wedge(\mathscr{B}\wedge\mathscr{C})\equiv\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\wedge\mathscr{C},\quad \mathscr{A}\vee(\mathscr{B}\vee\mathscr{C})\equiv\mathscr{A}\vee\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$ （结合律）
10. $\mathscr{A}\wedge(\mathscr{B}\vee\mathscr{C})\equiv(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})\vee(\mathscr{A}\wedge\mathscr{C}),\quad \mathscr{A}\vee(\mathscr{B}\wedge\mathscr{C})\equiv(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\wedge(\mathscr{A}\vee\mathscr{C})$ （分配律）
11. $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}\equiv\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B}$

1.4 范式

定义 1.32. 形如 $(\sim p_1\wedge p_2\wedge\sim p_3)$，对 FTF 取值为 T，对其他取值为 F，称为基本合取式（或短语，子句）。

定义 1.33 (文字). 称原子变元 p（正文字）和它的否定 $\sim p$（负文字）为一个文字。

命题 1.34. 对任意真值函数 f 都对应于一个受限命题形式 $\mathscr{A}$，即可以构造一个受限命题形式 $\mathscr{A}$，它的真值函数为 f。

证明. 如果 $\mathscr{A}$ 是矛盾式，令 $\mathscr{A}$ 为 $p_1\wedge\sim p_1\wedge p_2\cdots\wedge p_n$

如果 $\mathscr{A}$ 不是矛盾式，对一组真值指派 σ 使得 $\mathscr{A}$ 取 T，存在一个基本合取式 Q_σ 对其他真值指派取 F，令 $\mathscr{A}$ 为 $\vee_\sigma Q_\sigma$ 即可。 □

推论 1.35. *任一非矛盾的命题形式都与一个形式为* $\vee_{i=1}^m(\wedge_{j=1}^n Q_{ij})$ *的受限命题形式，其中* Q_{ij} *为文字，称为析取范式 (DNF)。*

推论 1.36. *任一非矛盾的命题形式都与一个形式为* $\wedge_{i=1}^m(\vee_{j=1}^n Q_{ij})$ *的受限命题形式，其中* Q_{ij} *为文字，称为合取范式 (CNF)。*

1.5 连接符的完备集

定义 1.37. 连接符的完备集 S 是指对任意真值函数都可用仅含 S 中连接符的命题形式来表达。

定理 1.38. *$\{\sim,\vee,\wedge\}$ 是一个连接符的完备集。*

定理 1.39. *$\{\sim,\wedge\},\{\sim,\vee\},\{\sim,\to\}$ 都是连接符的完备集。*

证明. 参考1.31。 □

注 1.40. $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}\equiv\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B}$

注 1.41.

- *这些连接符完备集都含有否定符* $\sim$
- *其他连接符可相互定义（需要* $\sim$*）*
- *就 5 个连接符而言，除了这三对之外，没有其他两个构成完备集*

定义 1.42 (竖). 定义连接符 $|$（与非）和 $\downarrow$（或非）如下

$$\mathscr{A}\mid\mathscr{B}=(\sim(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})),\quad \mathscr{A}\downarrow\mathscr{B}=(\sim(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}))$$

定理 1.43. *$\{|\},\{\downarrow\}$ 分别都是连接符的完备集。*

证明. 只需证 $\{\sim,\wedge\}$ 可以被 $\downarrow$ 表示，$\{\sim,\vee\}$ 可以被 $|$ 表示。

事实上，$\sim p$ 与 $p\downarrow p$ 与 $p\mid p$ 等价，$p\wedge q$ 与 $((p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q))$ 等价，$p\vee q$ 与 $((p\mid p)\mid(q\mid q))$ 等价。 □

定义 1.44 (异或). 定义逻辑连接符 $\oplus$（异或），如下

$$\mathscr{A}\oplus\mathscr{B}=((\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\wedge((\sim\mathscr{A})\vee(\sim\mathscr{B}))$$

1.6 推理及其有效性

定义 1.45. 推理是从一些判断推出另一个判断的思维过程，推出的判断称为结论，用于推出结论的那些判断称为前提。

定义 1.46. 演绎推理是从一些基本前提出发（公理）通过一定的推理规则推出结论的过程，所可能推出的结论是不可废除的。

定义 1.47. 推理形式（亦称形式推理）是命题形式的一个有限序列，最后一个命题形式是结论，其他的命题形式为前提。

注 1.48. 一个有效的推理形式应保证在前提为 T 时，结论的真值也为 T。

定义 1.49. 推理形式 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \quad \therefore \mathscr{A}$ 是无效的，如果对上述出现的变元，至少存在一组真值指派使得 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n$ 的真值为 T，但是 $\mathscr{A}$ 为 F。

注 1.50 (有效推理形式)**.**

1. 分离规则或三段论（*Modus Ponens*，*MP*）若 $\mathscr{A}, \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，则 $\mathscr{B}$
2. 逆分离规则（*Modus Tollens*，*MT*）若 $\sim \mathscr{B}, \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，则 $\mathscr{A}$
3. 假言三段论（*Hypothetical Syllogism*，*HS*）若 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \mathscr{B} \to \mathscr{C}$，则 $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$
4. 析取三段论（*Disjunctive Syllogism*，*DS*）若 $\sim \mathscr{A}, \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$，则 $\mathscr{B}$
5. 归谬法（*Reductio ad Absurdum*）若 $\mathscr{A} \to \sim \mathscr{A}$，则 $\sim \mathscr{A}$，若 $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \wedge \sim \mathscr{B})$，则 $\sim \mathscr{A}$
6. 引入规则若 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$，则 $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$，$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$
7. 消去规则若 $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$，则 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$

命题 1.51 (有效推理与逻辑隐含的关系)**.** 推理形式

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n \qquad \therefore \mathscr{A}$$

是有效的当且仅当 $(\mathscr{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A}$ 是重言式

证明. 反证法，若

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n \qquad \therefore \mathscr{A}$$

是有效的但是 $(\mathscr{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A}$ 不是重言式，则对上述形式中出现的变元，存在一组真值指派，使 $\mathscr{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n$ 为 T，但是 $\mathscr{A}$ 为 F，即 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$ 真值均为 T，矛盾。

反之类似。 □

定义 1.52 (模型)**.** 对任何命题形式 $\mathscr{A}$，若存在一个真值指派 v 使得 $\mathscr{A}$ 取值 T，则 v 称为 $\mathscr{A}$ 的一个模型，亦即 v 满足 $\mathscr{A}$，记作 v$\models \mathscr{A}$，令 Γ 是一个命题形式集，v 为一个真值指派，若对所有的 $\mathscr{A} \in \Gamma$,v$\models \mathscr{A}$，则称 v 是 Γ 的一个模型。

定义 1.53 (蕴含关系)**.** 令 Γ 是一个命题形式集，$\mathscr{A}$ 是任一命题形式，则 $\Gamma \models \mathscr{A}$，当且仅当对任一真值指派 v，若 v$\models \Gamma$，则 v$\models \mathscr{A}$，称为 Γ 蕴含 $\mathscr{A}$。亦即 Γ 的模型也是 $\mathscr{A}$ 的模型。

注 1.54. Γ 中不一定有 $\mathscr{A}$

定理 1.55. 推理形式 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \quad \therefore \mathscr{A}$ 是有效的，当且仅当 $\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}$ 是重言式，当且仅当 $\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n \models \mathscr{A}$

作业 2

1. 证明命题形式 $(\sim (p \vee \sim q)) \to (q \to r)$ 与下列每个命题形式都是逻辑等价的：
(a) $q \to (p \vee r)$
(b) $(\sim (\sim q \vee r) \to (q \to p))$
2. 给出与下列命题形式逻辑等价的合取范式和析取范式:
(a) $p \leftrightarrow q$
(b) $\sim ((p \to \sim q) \to r)$

3. (a) 给出与 $(\sim p \wedge \sim q) \to (\sim r \wedge s)$ 逻辑等价的只出现连接符 $\sim$ 和 $\vee$ 的命题形式;
(b) 给出与 $(p \leftrightarrow (\sim q)) \leftrightarrow r$ 逻辑等价的只出现连接符 $\sim$ 和 $\wedge$ 的命题形式;
(c) 给出与 $((p \wedge q) \vee (r \wedge s))$ 逻辑等价的只出现连词 $\sim$ 和 $\to$ 的命题形式。
4. 证明:$\{\sim, \leftrightarrow\}$ 不是连接符的完备集
5. 对下列的每个命题，写出适当的推理形式并判断其是否有效:
(a) 若函数 f 不是连续的，则函数 g 是不可微的；g 是可微的，故 f 是连续的
(b) 若 U 是 V 的子空间，则 U 是 V 的子集，U 包含零向量且 U 是闭的；U 是 V 的子集，且若 U 是闭的，则 U 包含零向量。故若 U 是闭的，则 U 是 V 的子空间。
6. 假设 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \quad \therefore \mathscr{A}$ 是一个有效的推理形式。证明:$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_{n-1}; \quad \therefore (\mathscr{A}_n \to \mathscr{A})$ 是一个有效的推理形式。

2 命题逻辑：语法

2.1 形式系统

定义 2.1 (命题演算). 命题演算形式系统 L 定义如下：$\mathscr{L}_0$

- 一个（可能无穷的）符号集（字符表）
  $\sim, \to, (,), p_1, p_2, \cdots$
- 一个公式集，归纳定义如下
  （1）对每个 $i \geq 1$，p_i 是公式
  （2）若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是公式，则 $(\sim \mathscr{A})$ 和 $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 也是公式
  （3）所有公式都是由（1）和（2）生成
- 一组公理：通过三个公理模式来刻画，对任何公式 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$，下列公式是 L 的公理
  （L1）$(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$
  （L2）$((\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C})))$
  （L3）$(((\sim \mathscr{A}) \to (\sim \mathscr{B})) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$
- 演绎规则：只有一条分离规则 MP

注 2.2 (几何公理系统).

- *Euclid 几何公设*
  (1) 一条直线段可以联接两个点
  (2) 一条直线上任何一条直线段可以无限延伸
  (3) 给定一条直线段，可以以一个端点为圆心，以此线段为半径做一个圆
  (4) 一切直角都彼此相等
  (5) 如果两条直线与第三条直线相交时，在第三条直线的某一侧三条线所夹的内角之和小于两个直角的和，则那两条直线沿着这一侧延伸足够长之后必然相交
  - 给定任一直线和不在直线上的一点，存在有一条，且仅仅存在一条通过那个点，且永不与前一条直线相交的直线，无论两直线延伸多远

- 非 *Euclid* 几何：第五公设（平行公设）
  若断言没有这样的直线存在，则是椭圆几何
  若断言至少有两条这种直线存在，则是双曲几何

- *1823* 年，*Bolyai* 和 *Lobachevskii* 独立发现
  论证：若你设定它的反面，然后以这样一条公设作为你的第五公设开始推演几何学，肯定不久之后你会制造出矛盾。因为没有任何数学系统能支持矛盾，你就表明了你自己的那个第五公设是不可靠的，于是表明了 *Euclid* 的第五公设是可靠的

定义 2.3 (证明)**.** 形式系统 L 中的一个(形式)证明(proof)是指一个公式序列 $\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_n$,使得对每个 $i(1\le i\le n)$, $\mathscr{A}_i$ 或是 L 中的一个公理,或可由此序列中位于前面的两个公式 $\mathscr{A}_j$ 和 $\mathscr{A}_k(j\le i,k\le i)$,作为应用分离规则 MP 的直接后承而得,称为在 L 中 $\mathscr{A}_n$ 的一个证明,$\mathscr{A}_n$ 称为 L 的一条定理 (theorem)

定义 2.4 (演绎)**.** 令 Γ 是 L 中的公式集。L 中的公式序列 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n$ 是从 Γ 的一个演绎，如果对每个 $i(1\le i\le n)$，下列之一成立：

（1）$\mathscr{A}_i$ 是 L 的公理

（2）$\mathscr{A}_i$ 属于 Γ

（3）$\mathscr{A}_i$ 可以由此序列中位于前面的两个公式 $\mathscr{A}_j,\mathscr{A}_k$，作后承直接得到。

$\mathscr{A}_n$ 称为从 Γ 可演绎的，或称为 L 中 Γ 的一个后承，若公式 $\mathscr{A}$ 是 Γ 的某个演绎的最后一项，亦称 Γ 推出了 $\mathscr{A}$，记作 $\Gamma\vdash_L\mathscr{A}$

注 2.5. 演绎逻辑意味所有（无穷）结论（定理）都蕴藏在前提（公理）中，演绎过程只是把结论找出来，某种意义上，演绎并不发现新（未知）知识。

定理 2.6 (演绎定理)**.** 若 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}\vdash_L\mathscr{B}$，则 $\Gamma\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$，其中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是 *L* 中的公式，Γ 是 *L* 中的公式集。

证明.（结构归纳）对从 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$ 到 $\mathscr{B}$ 的演绎序列中公式的数目做归纳。

假定这个序列只有一个公式，则此公式就是 $\mathscr{B}$。

1. $\mathscr{B}$ 是公理，则

(1) $\mathscr{B}$ 公理

(2) $\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ (L1)

(3) $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ (1)(2)MP

为从 Γ 到 $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ 的一个演绎，即 $\Gamma\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$

2. $\mathscr{B}$ 属于 Γ，则

(1) $\mathscr{B}$ 为 Γ 的成员

(2) $(\mathscr{B}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))$ (L1)

(3) $(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ (1)(2)MP

3. $\mathscr{B}$ 就是 $\mathscr{A}$，则

(1) $(\mathscr{A}\to((\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}))\to((\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{A}))\to(\mathscr{A}\to\mathscr{A}))$ (L2)

(2) $(\mathscr{A}\to((\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}))$ (L1)

(3) $((\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{A}))\to(\mathscr{A}\to\mathscr{A}))$ (1)(2)MP

(4) $(\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{A}))$ (L1)

(5) $(\mathscr{A}\to\mathscr{A})$ (3)(4)MP

为 L 中的一个证明，即 $\vdash_L(\mathscr{A}\to\mathscr{A})$

设对从 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$ 到 $\mathscr{C}$ 的演绎序列长度小于 $n(n\ge 1)$ 的所有公式 $\mathscr{C}$，要证明的结论都成立，考虑从 $\Gamma\cup\{\mathscr{A}\}$ 到 $\mathscr{B}$ 的演绎序列长度为 n，则

1. $\mathscr{B}$ 是公理
2. $\mathscr{B}$ 属于 Γ
3. $\mathscr{B}$ 就是 $\mathscr{A}$

这三种情况与前面类似

4. $\mathscr{B}$ 由演绎中较前两个公式应用 MP 而得, 则这两个公式必为 $\mathscr{C}$ 和 $(\mathscr{C} \to \mathscr{B})$ 的形式，就有 $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{C})$ 和 $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to (\mathscr{C} \to \mathscr{B}))$

不妨设 (1)-(k) 为 Γ 到 $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 的演绎，(k+1)-(l) 为 Γ 到 $\mathscr{A} \to (\mathscr{C} \to \mathscr{B})$ 的演绎。

$$(l+1)\ (\mathscr{A} \to (\mathscr{C} \to \mathscr{B})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}))\quad (L2)$$
$$(l+2)\ (\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})\quad (l)(l+1)MP$$
$$(l+3)\ (\mathscr{A} \to \mathscr{B})\quad (k)(l+2)MP$$

从 (1) 到 (l+3) 为从 Γ 到 $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 的一个演绎，故 $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ □

定理 2.7 (演绎定理的逆). 若 $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$，则 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{B}$，其中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是 L 中的公式，Γ 是 L 中的公式集。

证明. 若 $\Gamma \vdash_L (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$，则存在从 Γ 到 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 的演绎，不妨设为 (1)-(k)，添上

$$(k+1)\ \mathscr{A}$$
$$(k+2)\ \mathscr{B}\quad (k)(k+1)MP$$

后为 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ 到 $\mathscr{B}$ 的演绎。 □

推论 2.8 (假言三段论 HS). 对任何公式 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$，有

$$\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \mathscr{B} \to \mathscr{C} \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{C}$$

证明.

$$(1)\mathscr{A} \to \mathscr{B}$$
$$(2)\mathscr{B} \to \mathscr{C}$$
$$(3)\mathscr{A}$$
$$(4)\mathscr{B}\qquad (1)(3)MP$$
$$(5)\mathscr{C}\qquad (2)(4)MP$$

则 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \mathscr{B} \to \mathscr{C}, \mathscr{A} \vdash \mathscr{C}$，由演绎定理，

$$\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \mathscr{B} \to \mathscr{C} \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{C}$$

□

注 2.9. 形式证明中，可省略指明替换、分离（MP）和演绎定理。

定义 2.10 (其他连接符). 其他连接符可以作为定义引入，如

$$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \equiv \sim (\mathscr{A} \to \sim \mathscr{B})$$

$$\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \equiv \sim \mathscr{A} \to \mathscr{B}$$

$$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B} \equiv (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$$

定义 2.11. 令 Γ 是公式集，若存在某个公式 $\mathscr{A}$，使得 $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ 和 $\Gamma \vdash \sim \mathscr{A}$，则称 Γ 是不一致的，否则，称 Γ 是一致的。

令 Γ 是公式集，$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是任何公式，$\{\mathscr{A}, \sim \mathscr{B}\} \subset \Gamma$，则 $\Gamma \vdash \mathscr{B}$，称为平凡性。

令 Γ, Γ' 是公式集，$\Gamma \subset \Gamma'$，$\mathscr{A}$ 是任何公式，若 $\Gamma \vdash \mathscr{A}$，则 $\Gamma' \vdash \mathscr{A}$，称为单调性。

定义 2.12 (极大一致)**.** 一个公式集 Γ 称为极大一致的，若

- Γ 是一致的
- 不存在另一个一致的公式集 Γ'，使得 $\Gamma \subset \Gamma'$

作业 3

1. 证明下列公式是定理:
(a) $(p_1 \to p_2) \to ((\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1))$
(b) $((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3))$
(c) $(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)$
2. 证明下列各式成立：$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 为任意公式
(a) $\sim \mathscr{A} \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{B}$
(b) $\mathscr{A} \vdash_L \sim\sim \mathscr{A}$
(c) $\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to \sim \mathscr{A} \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{C}$
3. 用演绎定理，对任意公式 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$，证明下列公式是定理:
(a) $(\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to (\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B})$
(b) $((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$
4. 令 L 是通过把 L 中公理模式 (L3) 替换为如下的 (L3)：$((\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}) \to ((\sim \mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}))$，证明对 L（亦即 L ）中任何公式 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$
$(i) \vdash_L ((\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}) \to ((\sim \mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{A}))$
$(ii) \vdash_{L'} ((\sim \mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$
并证明若一个公式是 L 的定理当且仅当它是 L 的定理。
5. 什么是极大一致子集（MCS）？定义极大一致推理 $\vdash_{MCS}$ 如下：$\Gamma \vdash_{MCS} \mathscr{A}$ 当且仅当 $MCS(\Gamma) \vdash \mathscr{A}$。试证明 $\vdash_{MCS}$ 具有平凡性和单调性。
6. [附加题]
证明下列公式是定理:
(a) $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \to \mathscr{B}$
(b) $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}))$

2.2 完全性定理

定义 2.13. L 的一个赋值是一个函数 v，其定义域是 L 的公式，值域是 $\{T, F\}$，使得对 L 的任意公式 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$，$v(\mathscr{A}) \neq v(\sim \mathscr{A})$，$v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = T$ 当且仅当 $v(\mathscr{A}) = T$ 且 $v(\mathscr{B}) = F$

定理 2.14 (可靠性定理)**.** *L 的每一个定理都是重言式。*

证明. (对构成 $\mathscr{A}$ 在 L 中证明的公式序列中公式的数目进行归纳)

令 $\mathscr{A}$ 是一个定理

(1) 若 $\mathscr{A}$ 的证明仅有一步，则 $\mathscr{A}$ 一定是公理，易证公理都是重言式

(2) 设 $\mathscr{A}$ 的证明有 $n(n \geq 1)$ 步，假设 $\mathscr{C}$ 的证明少于 n 步，则 $\mathscr{C}$ 是重言式。若 $\mathscr{A}$ 是公理，则 $\mathscr{A}$ 是重言式；若 $\mathscr{A}$ 是由证明序列中 $\mathscr{A}$ 前面的两项公式 $\mathscr{B}$ 和 $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ 应用 MP 而得，由归纳假设可知，$\mathscr{B}$ 和 $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ 都是重言式，$\mathscr{A}$ 是重言式 □

推论 2.15. 若 $\vdash \mathscr{A}$ 则 $\models \mathscr{A}$。

定义 2.16. L 的一个扩充（extension）是通过**修改或扩大**的公理组使得 L 的所有定理仍是定理（可能引入新的定理）而得的一个形式系统。

注 2.17. *L 的一个扩充可能和 L 没有公共的公理。*

定义 2.18. L 的一个扩充是一致的，若不存在 L 的公式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim \mathscr{A}$ 都是这个扩充的定理。

命题 2.19. *L 是一致的。*

证明. 设 L 是不一致的，则存在 L 的公式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim \mathscr{A}$ 都是 L 的定理。由可靠性定理知，$\mathscr{A}$ 和 $\sim \mathscr{A}$ 都是重言式，这是不可能的。 □

命题 2.20. *L 的一个扩充 L^* 是一致的，当且仅当存在一个公式，它不是 L^* 的定理*

证明. ”$\Rightarrow$”: 由于扩充是一致的，故对任意公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 和 $\sim \mathscr{A}$ 至少有一个不是 L* 的定理。

”$\Leftarrow$”: 若 L 不一致，设 $\mathscr{A}$ 是任意公式，由一致性的定义，存在 $\mathscr{B}$ 使得 $\mathscr{B}$ 和 $\sim \mathscr{B}$ 都是 L* 的定理，由于 $\sim \mathscr{B} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ 是 L 的定理，所以也是 L* 的定理，从而 $\vdash_{L*} \mathscr{A}$，故任意 $\mathscr{A}$ 都是 L* 的定理。 □

命题 2.21. *令 L^* 是 L 的一个一致扩充，$\mathscr{A}$ 是 L 的一个公式且不是 L^* 的定理，则 L^{**} 也是一致的，这里 L^{**} 是 L 的一个扩充，它由 L^* 补充 $\sim \mathscr{A}$ 为公理而得*

证明. 设若 L** 不一致，则存在公式 $\mathscr{B}$，使得 $\vdash_{L**} \mathscr{B}$ 且 $\vdash_{L**} \sim \mathscr{B}$，如2.20所证，可得 $\vdash_{L**} \mathscr{A}$。

由于 L** 是在 L* 中补充 $\sim \mathscr{A}$ 作为公理，$\vdash_{L**} \mathscr{A}$ 即是 $\sim \mathscr{A} \vdash_{L*} \mathscr{A}$，由演绎定理，$\vdash_{L*} ((\sim \mathscr{A}) \to \mathscr{A})$

可证 $\vdash_L (\sim \mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$，所以 $\vdash_{L*} (((\sim \mathscr{A}) \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A})$，应用 MP，可得 $\vdash_{L*} \mathscr{A}$，这和 $\mathscr{A}$ 不是 L* 的定理相矛盾。 □

定义 2.22. L 的一个扩充是完全的，若对每个公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 或者 $(\sim \mathscr{A})$ 是该扩充的定理

命题 2.23. *令 L^* 是 L 的一致扩充，则存在 L^* 的一个一致完全扩充。*

证明. 归纳构造即可。 □

命题 2.24. *若 L^* 是 L 的一个一致扩充，则存在一个赋值，使得 L^* 的每个定理取值都为 T*

证明. 定义 L 中公式的赋值 v 如下：J 是 L* 的一致完全扩充，$v(\mathscr{A}) = T$，若 $\vdash_J \mathscr{A}$；$v(\mathscr{A}) = F$，若 $\vdash_J \sim \mathscr{A}$

因 J 是完全的，从而 v 定义在所有公式上

且 J 是一致的，故 $v(\mathscr{A}) \neq v(\sim \mathscr{A})$

进一步，需证 $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = F$ 当且仅当 $v(\mathscr{A}) = T$ 且 $v(\mathscr{B}) = F$

假定 $v(\mathscr{A}) = T$，$v(\mathscr{B}) = F$ 但 $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = T$，则有 $\vdash_J \mathscr{A}$，$\vdash_J \sim \mathscr{B}$ 和 $\vdash_J \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，应用 MP 可得 $\vdash_J \mathscr{B}$，这和 J 是一致的相矛盾。

反之，假定 $v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = F$ 但 $v(\mathscr{A}) = F$（分别 $v(\mathscr{B}) = T$），则有 $\vdash_J \sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 和 $\vdash_J \sim \mathscr{A}$（分别 $\vdash_J \mathscr{B}$），因有 $\vdash_J \sim \mathscr{A} \to (\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A})$（分别 $\vdash_J \mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$），应用 MP，得到 $\vdash_J \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，这与 J 是一致的相矛盾。

这样，v 是一个赋值。令 $\vdash_{L*} \mathscr{A}$，则 $\vdash_J \mathscr{A}$，因此 $v(\mathscr{A}) = T$ □

定理 2.25. 若 $\mathscr{A}$ 是一个公式且是重言式，则 $\vdash_L \mathscr{A}$

推论 2.26 (可靠与完全性定理)**.** $\vdash \mathscr{A}$ 当且仅当 $\models \mathscr{A}$

命题 2.27. L 是可判定的（*decidable*），即存在一种能行的方法去判定 L 中给定的公式是否为定理。

证明. 欲判定一个公式是否为 L 的定理，只需把它看作一个命题形式而构造它的真值表，它是定理当且仅当它是重言式。 □

证明. 令 $\mathscr{A}$ 是一个公式且是重言式，设若 $\mathscr{A}$ 不是 L 的定理，包含 $\sim \mathscr{A}$ 作为一条公理的扩充 L* 是一致的。这样，存在一个赋值 v，赋予 L* 的每个定理的值为 T，特别地，$v(\sim \mathscr{A}) = T$，这与 $\mathscr{A}$ 是重言式相矛盾。 □

作业 4

1. 证明 L 的每条公理（模式）是重言式。
2. 令 $\mathscr{A}$ 是一个 L 的公式，令 L+ 是一个通过增加 $\mathscr{A}$ 作为新公理的 L 的扩充。
(a) 证明 L+ 的定理集与 L 的定理集不同，当且仅当 $\mathscr{A}$ 不是 L 的定理。
(b) 设 $\mathscr{A}$ 为 $(\sim p_1 \to p_2) \to (p_1 \to \sim p_2)$，证明 L+ 的定理集包含 L 的定理集；L+ 是否 L 的一致扩充?
3. 证明：若 $\mathscr{B}$ 是一个矛盾，则 $\mathscr{B}$ 不能是任何 L 的一致扩充的定理。
4. 令 J 是 L 的一致完全扩充，$\mathscr{A}$ 是 L 的公式。证明：通过把 $\mathscr{A}$ 作为补充公理获得的 J 的扩充是一致的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是一个 J 的定理。
5. [附加题，取自 Hoftstader]
pq 系统有三个不同的符号：
- 字母 p、q 和短杠 -。

pq 系统有无穷多条公理，公理模式定义如下：
- 只要 x 仅由一串短杠组成，那么 x - qxp- 就是一条公理，这里 x 代表短杠。

试给出若干条公理。
pq 系统只有一条规则：
- 假设 x、y 和 z 都代表只包含短杠的特定的符号串，并且假设 xqypz 是一条已知的定理，那么 x - qypz- 就是一条定理。

试给出若干个由这规则能生成的推理例子，并为 pq 系统的定理找出一个判定过程。
pq 定理很像是加法，例如，- - - - -q - -p - – 这个符号串是一条定理，因为 5 等于 2 加 3。若以此同构作为 pq 系统的解释，试问 pq 系统是否完全?

3 一阶逻辑：模型论

3.1 谓词和量词

定义 3.1 (全称量词和存在量词)**.** “对所有 x” 称为全称量词，用符号 ($\forall x$) 表示，“存在（至少一个）x” 称为存在量词，用符号 ($\exists x$) 表示，这里 x 是任意对象，称为（对象）变元，代表未确定的主体用 x，y，z（可加下标）等表示变元。

注 3.2. $\forall x A(x)$：“每个对象都具有 A 决定的属性”；$\exists x A(x)$：“有某些对象具有 A 决定的属性”

命题 3.3. 下面两个句子有同样的含义

- 并非所有 x 都不具有属性 P：$((\sim\forall x)\sim P(x))$
- 存在某个 x 具有属性 P：$((\exists x)P(x))$

定义 3.4. 当变元在以量词开始的命题中被使用时，称为约束变元；否则，称为自由变元。

注 3.5. “x 加 1 等于 2” 可表成 $E(f(x,1),2)$，x 是自由变元

3.2 一阶语言

定义 3.6. 一阶逻辑的形式语言，即称一阶语言（first-order language），记为 L.

定义 3.7 (一阶语言的字符表)**.**

变元：$x_i\cdots$
常元：$a_i\cdots$
谓词符：$A_i^n\cdots$
函项符：$f_i^n\cdots$
技术性符号："(", ")",
连接词：$\sim,\rightarrow$
量词：$\forall$

定义 3.8. 给定一个（通用）一阶语言 L，一个 L 的扩展（expansion）L' 有如下变化（或变化之一）

- 从 L 的一个变元系列变成两个（或多个）变元系列，如增加 $x_{i_k}\cdots$，i_k 系列是 i 系列的子系列
- 从 L 的一个常元系列变成两个（或多个）常元系列，如增加 $a_{i_k}\cdots$，i_k 系列是 i 系列的子系列
- 从 L 的一个函项符系列变成两个（或多个）函项符系列，如 $f_{i_k}^n\cdots$，i_k 系列是 i 系列的子系列
- 从 L 的一个谓词符系列变成两个（或多个）谓词符系列，如增加 $A_{i_k}^n\cdots$，i_k 系列是 i 系列的子系列

其它符号不变。亦称 L' 为两类（多类）一阶语言。

定义 3.9. 一个 L -字符的有限（可为空）序列称为 L -（字符）串——串的长度即字符总数（字符可重复出现），空串的长度为 0

- 若 s, t 都是串，st 作为 s, t 连接而成的串
- 若 r = st，r, s, t 都是串，则 s 是一个 r 的初始段；如果 t 是非空的，则 s 是一个 r 的（真）子段
- 类似地，若 r = st，r, s, t 都是串，则 t 是一个 r 的结束段；如果 s 是非空的，则 t 是一个 r 的子段

注 3.10. *L*-中两种串：项，公式

定义 3.11 (项)**.** （令 L 是一个一阶语言，）项（term）是如下定义的 L-串

(1) 变元和常元都是项
(2) 若 f_i^n 是 L 中的函项符，且 $t_1,\cdots,t_n$ 是 L 中的项，则 $f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$ 是 L 中的项
(3) 所有项组成的集由 (1) 和 (2) 生成
常元亦称常项，是函项的特殊情况，即 0 元函项

定义 3.12. 闭项（closed term）指不含变元的项，即由所有常元及其通过函项符生成的；含变元的项可称为开项。

定义 3.13. 项 t 的（复杂）度（记 $deg(t)$）指的 t 中出现的函项符个数。

定义 3.14. 原子（公式）是如下定义的 L-串：若 A_j^n 是 L 中的一个谓词符，且 $t_1, \cdots, t_n$ 是 L 中的项，则 $A_j^n(t_1, \cdots, t_n)$ 是 L 中的一个原子，$t_1, \cdots, t_n$ 是 A_j^n 的论据。

定义 3.15. （合式）公式是如下定义的 L-串

(1) 每个原子是公式

(2) 若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是公式，则 $(\sim \mathscr{A}), (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 和 $(\forall x_i)\mathscr{A}$ 也是公式，其中 x_i 是任意变元

(3) 所有公式的集由 (1) 和 (2) 生成

注 3.16. 命题语言 L_0 是一阶语言 L 的子语言，L 中不含量词、项，只含 *0* 元谓词符即为 L_0，L_0 公式简称命题公式，L 公式简称一阶公式

定义 3.17. $\mathscr{B}$ 称为一个公式 $\mathscr{A}$ 的子公式，若 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 或出现在 $\mathscr{A}$ 中的一个公式，若子公式 $\mathscr{B}$ 不是 $\mathscr{A}$ 则为严格子公式。

定义 3.18. 公式 $\mathscr{A}$ 的（复杂）度（记 $deg(\mathscr{A})$）是对 $\mathscr{A}$ 中出现的 $\to$ 加 2、$\sim, \forall$ 分别加 1 的和。

注 3.19.

- 量词和它所作用的公式不一定有联系，例：$(\forall x_1)A_1^1(x_2)$
- 记 $A(x_i)$ 强调 A 中包含 x_i，但不排除 A 中可能还包含其它变元
- 为方便起见，作为被定义的符号引进 $\exists, \wedge, \vee$ 和 $\leftrightarrow$
- 不引起混淆的情况下有些括号可省略，省略括号时连接符优先序跟命题逻辑相同
- 量词 $(\forall x)(\exists x)$ 的括号亦可省略，如 $\forall x \exists x$，且规定量词比连接符优先序高；可使用 “.” 指明量词辖域，如 $\forall x.A(x) \to B(x)$ 即 $\forall x(A(x) \to B(x))$
- $\forall x_1 \cdots \forall x_n$ 可简写成 $\forall x_1 \cdots x_n$
- 对连续多个否定符或量词按从右向左（由里向外）顺序处理
- $\forall x_1 \cdots \forall x_n A$ 可简写成 $\forall x_1 \cdots x_n A$

定义 3.20. 赋予一个（L-）串的权重为对其出现的变元加 -1、$n-$ 元函项符和谓词符分别加 $n-1$、$\sim$ 加 0、$\to$ 加 1、$\forall$ 加 1 的总和。

引理 3.21. 每个项 t 具有权重 -1，t 的任意初始子段的权重都是非负的，$f_i^n t_1 \cdots t_n$ 是唯一确定的。

证明. 对 $deg(t)$ 施归纳证明，若 t 是单一变元，显然成立。

若 t 是 $f_i^n t_1 \cdots t_n$，则 $deg(t_1), \cdots, deg(t_n) < deg(t)$，由归纳假设，t 的权重为 (n - 1) + n × (-1) = -1

由此可见，串 $t_1 \cdots t_n$ 中 t_1 作为最短的初始段是唯一确定的（权重 -1）；类似地，$t_2, \cdots, t_n$ 都是唯一确定的，亦即，项 $f_i^n t_1 \cdots t_n$ 其论据都是唯一确定的 □

引理 3.22. 每个项 $\mathscr{A}$ 具有权重 -1，$\mathscr{A}$ 的任意初始子段的权重都是非负的，$A_j^n t_1 \cdots t_n$ 是唯一确定的。

命题 3.23. 一阶语言 L 的表达式集是能枚举的；项集和公式集都是能枚举的。

证明. 首先，对每个符号 w 赋予一个正整数 g(u) 进行编码，如下 $g(()=3, g())=5, g(,)=7, g(\sim)=9, g(\to)=11, g(\forall)=13, g(x_k)=13+8k, g(a_k)=7+8k, g(f_k^n)=1+8(2^n3^k), g(A_k^n)=3+8(2^n3^k)$

然后，对每个表达式 $w_0w_1\cdots w_n$，赋予一个数 $2^{g(u_0)}3^{g(u_1)}\cdots p_i^{g(u_i)}$，这里 p_i 是第 i 个素数 $(p_0=2)$，这样，能用所编码的自然数顺序枚举全部表达式 □

定义 3.24. 在公式 $(\forall x_i)A$ 中，称 A 是量词 ∀ 的辖域（scope），当 $(\forall x_i)A$ 在公式 B 中作为子公式出现时，该量词在 B 中的辖域是 A。

变元 x_i 在一个公式中的出现称为约束的，若它出现在 $(\forall x_i)$ 的辖域之中，或它就在 $(\forall x_i)$ 中；否则，称为自由的。

注 3.25. 一个变元可在同一公式中同时自由出现和约束出现。

定义 3.26 (项替换). 令 s,t 是（L 的）项。用 t 替换 s 中变元 x_i 的处处出现所得的项 $s(x_i/t)$，归纳定义如下：

若 s 为 x_i，则 $s(x_i/t)$ 为 t

若 s 为 $x_j(j\neq i)$，则 $s(x_i/t)$ 为 x_j

若 s 为 $f_i^n(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，$s_1,s_2,\cdots,s_n$ 是项，则 $s(x_i/t)$ 为 $f_i^n(s_1(x_i/t),s_2(x_i/t),\cdots,s_n(x_i/t))$。

注 3.27. 引入 “/” 作为技术性符号，但不是必需的，可记 $s(x_i/t)$ 为替换结果 $s(t)$。

定义 3.28. 令 $\mathscr{A}$ 是（L 的）一个公式，t 是一个项，x_j 是出现在 t 中的任何变元。t 对 $\mathscr{A}$ 中的 x_i 是自由（可替换）的（简称 t 对 x_i 自由），若 x_i 不自由出现在 $\mathscr{A}$ 中的任一 $(\forall x_j)$ 的辖域中。

注 3.29.

- 不含变元的项对任一公式中的任一变元是自由的
- 若 t 中没有变元在 $\mathscr{A}$ 中是约束的，则 t 对 $\mathscr{A}$ 中任一变元都是自由的
- 对任何公式 $\mathscr{A}$ 和任何变元 x_i（不管它在 $\mathscr{A}$ 中是否自由出现），x_i 对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 是自由的（x_i 不自由出现在 $(\forall x_i)$ 的辖域中）
- 若 $\mathscr{A}$ 不含 x_i 的自由出现，则任何项对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 都是自由的

注 3.30. 有时记 $\mathscr{A}(x_i/t)$ 表示在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中用项 t 替换 x_i（的结果），同样地，技术性符号 “/” 不是必需的，可记为替换结果 $\mathscr{A}(t)$。

作业 5

1. 下列句子可否形式化？若可，用一阶语言表达：
(a) 不是每个函数都有导数。
(b) 存在连续不可导的函数。
(c) 张帅说李丽说他不再理她了。
2. 找一首诗歌（古诗、新诗或歌词），并用一阶语言形式化。
3. 把下列句子形式化，先只用全称量词，再只用存在量词：
(a) 不是所有汽车都有四个轮。
(b) 有些人或者懒惰或者糊涂。
4. 判断下列符号串哪个是（合式）公式？
(a) $A_1^2(f_1^1(x),x_1)$
(b) $f_1^3(x_1,x_3,x_4)$

(c) $(A_1^1(x_2) \to A_1^3(x_3, a_1))$
5. 下列公式中 x_1 的出现是自由或约束的?
(a) $(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, a_1))$
(b) $(A_1^1(x_3) \to (\sim (\forall x_1)(\forall x_2)A_1^3(x_1, x_2, a_1)))$
项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 在上述公式中对 x_2 是否自由?
6. 令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是 L 中 x_i 自由出现的公式，x_j 是一个不自由出现在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中的变元。证明：若 x_j 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由，则 x_i 在 $\mathscr{A}(x_j)$ 中对 x_j 自由，这里 $\mathscr{A}(x_j)$ 是对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中以 x_j 替换 x_i 的每个自由出现的结果。

3.3 解释

定义 3.31. L 的一个解释（interpretation）I 如下组成

- 一个非空集 D_I（I 的论域（domain）
- 一个不同元素（个体）集 $\{\bar{a_1}, \bar{a_2}, \cdots\}$
- 一个在 D_I 上的函项集 $\{\bar{f}_i^n | i > 0, n > 0\}$，$\bar{f}_i^n : D_I^n \to D_I$
- 一个在 D_I 上的关系集 $\{\bar{A}_i^n | i > 0, n > 0\}$，$\bar{A}_i^n \subset D_I^n$

L 中变元在 I 下解释作为论域 D_I 中的任意对象

注 3.32. *举个例子如下:*
公式 $\forall x_1 \forall x_2 \sim \forall x_3 \sim A_1^2(f_1^2(x_1, x_3)), x_2)$
可被解释为对所有 $x, y \in D_N$，*不是对每个* $z \in D_N$ $x + z \neq y$。
(1) D_N *为自然数集*
(2) 0 为特异元，作为 a_1 *的解释*
(3) 关系 “=” 作为谓词符 A_1^2 *的解释*
(4) 加法作为函项符 f_1^2 *的解释*
(5) 乘法作为函项符 f_2^2 *的解释*

3.4 满足

定义 3.33. I 上的一个赋值是一个从 L 的项集到 D_I 的映射 v

定义 3.34. 变元赋值 $u : \{x_1, x_2, \cdots, \} \to D_I$。

定义 3.35. 两个赋值 v 和 v' 是 i-等值的，若对每个 $j \neq i$，$v(x_j) = v'(x_j)$

定义 3.36. 令 $\mathscr{A}$ 是（L 的）一个公式，I 是（L 的）一个解释，u 是（L 的）一个变元赋值。
I 中一个赋值 v 满足 $\mathscr{A}$，记为 $I, u \models \mathscr{A}$，或 $I, v \models \mathscr{A}[u]$，
归纳定义如下：
(1) v 满足原子 $A_j^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，若 $\bar{A}_j^n(v(t_1), \cdots, v(t_n))$ 在 D_I 中为真
(2) v 满足 $\sim \mathscr{B}$，若 v 不满足 $\mathscr{B}$
(3) v 满足 $(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$，若 v 满足 $(\sim \mathscr{B})$，或满足 $\mathscr{C}$
(4) v 满足 $(\forall x_i)\mathscr{B}$，若对每一 i-等值于 v 的赋值 v' 满足 $\mathscr{B}$

定理 3.37. 令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是（L 的）一个公式，且 x_i 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中自由出现，t 是对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中 x_i 自由的项。设 v 是一赋值，v' 是 i-等值于 v 的另一赋值，且 $v'(x_i)=v(t)$，则 v 满足 $\mathscr{A}(t)$ 当且仅当 v' 满足 $\mathscr{A}(x_i)$

证明.

引理 3.38. 对任一 x_i 在其中出现的项 u，u' 是通过用 t 替换 x_i 的所有出现而得的项，则 $v(u')=v'(u)$

引理证明：

归纳证明

(1) u 是 x_i，u' 即为 t，则 $v'(u)=v'(x_i)=v(t)=v(u')$

(2) u 是 $f_i^n(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，其中 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 为较短长度的项

由归纳假设成立

对原定理

同样使用归纳证明

(1) $\mathscr{A}(x_i)$ 是原子，如 $A_j^n(u_1,\cdots,u_n)$，其中 $u_1,\cdots,u_n$ 为项

($\Leftarrow$) 设 $v'\models\mathscr{A}(x_i)$，则 $\bar{A}_j^n(v'(u_1),\cdots,v'(u_n))$ 可满足，$\bar{A}_j^n(v(u_1'),\cdots,v(u_n'))$ 可满足。其中 $u_1',\cdots,u_n'$ 为用 t 替换所有 x_i 的项，如此已证。

($\Rightarrow$) 同理

(2) ① $\mathscr{A}(x_i)$ 是 $\sim\mathscr{B}(x_i)$

② $\mathscr{A}(x_i)$ 是 $\mathscr{B}(x_i)\to\mathscr{C}(x_i)$

易证

③ $\mathscr{A}$ 是 $\forall x_j\mathscr{A}(x_i)(j\neq i)$

($\Leftarrow$) 设若 $v\not\models\mathscr{A}(t)$（欲反证 $v'\not\models\mathscr{A}(x_i)$）

则存在一个 j-等值于 v 的赋值 w，$w\not\models\mathscr{B}(t)$

令 w' 是一个 i-等值于 w 的赋值，（按已知条件）有 $w'(x_i)=w(t)$

按归纳假设（对较短的 $\mathscr{B}(x_i)$），由 $w\not\models\mathscr{B}(t)$，有 $w\not\models\mathscr{B}(x_i)$

t 对 $(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$ 中 x_i 是自由的，因此 x_j 不出现在 t 中

这样，对 $k\neq j$，v(t) 仅依赖于 $v(x_k)$，亦即对 $k\neq j$，$v(x_k)=w(x_k)$，因此 v(t) = w(t)，因 w 是 j-等值于 v 的，所以 w' 是 j-等值于 v'（据引理）

由 $w'\not\models\mathscr{B}(x_i)$，有 $v'\not\models(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$，即 $v'\not\models\mathscr{A}(x_i)$

($\Leftarrow$) 同理可证 □

作业 6

1. 给出 $\wedge,\vee,\exists$ 的可满足性定义。

2. 令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是 L 的一个公式，且 x_i 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中自由出现，t 是对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中 x_i 自由的项；设 v 是一赋值，v' 是 i-等值于 v 的另一赋值且 $v'(x_i)=v(t)$，则如果 v 满足 $\mathscr{A}(t)$ 那么 v' 满足 $\mathscr{A}(x_i)$。

3. 令 L 是一阶语言，除变元、技术性符号、连词和量词外，包含个体常元符 a_1，函项符 f_1^2 和谓词符 A_2^2，令 $\mathscr{A}$ 为如下公式：

$$\forall x_1\forall x_2(A_2^2(f_1^2(x_1,x_2),a_1)\to A_2^2(x_1,x_2))$$

定义 L 的解释 I 如下：D_I 为 $\mathbb{Z}$，$\bar{a}_1$ 为 0，$\bar{f}_1^2(x,y)$ 为 $x-y$，$\bar{A}_2^2(x,y)$ 为 $x<y$。

给出 $\mathscr{A}$ 在 I 下的解释，并判断它为真或假；给出另一个解释使得 $\mathscr{A}$ 的真值相反。

在解释 I 下，若可能给出满足和不满足以下公式的赋值：

$$\forall x_1 A_2^2(f_1^2(x_1,x_2),x_3)$$

以下闭式为真或假

$$\forall x_1 A_2^2(f_1^2(a_1,x_1),a_1)$$

4. 是否有一个（合适的 L ）解释使得公式

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^1(f_1^1(x_1)))$$

被解释为假？若有，则给出这个解释；若没有，说明理由。

5. 在算术解释 N 中，若可能，给出满足和不满足以下公式的赋值：

$$\forall x_1 A_1^2(f_2^2(x_1,x_2),x_3)$$

6. [附加题]

证明以下命题：

- 若 s，t 是项，x 是变元，v 是一个赋值，则 $v(s(x/t)) = s(v(x/t))$。
- 若项 t 在公式 $\mathscr{A}$ 中对变元 x 自由，则对任一赋值 v，$v \models \mathscr{A}(x/t)$ 当且仅当 $v \models \mathscr{A}(x)$。

（提示：据项和公式的归纳定义，即其度 deg，用结构归纳法）

3.5 真值

定义 3.39. 一个公式 $\mathscr{A}$ 是在解释 I 中为真的，若 I 中每个赋值 v 都满足 $\mathscr{A}$；$\mathscr{A}$ 是在 I 中为假的，若 I 中不存在满足 $\mathscr{A}$ 的赋值。一个解释 I 称为公式 $\mathscr{A}$ 的模型，若 I 中每个赋值 v 都满足 $\mathscr{A}$，即 I 使 $\mathscr{A}$ 为真；$\mathscr{A}$ 在 I 中为假，即 $\mathscr{A}$ 没有模型。记 I$\models \mathscr{A}$ 表示 $\mathscr{A}$ 在 I 中为真，或 I 是 $\mathscr{A}$ 的模型。令 Γ 是一个公式集，一个解释 I 是 Γ 的模型，当且仅当 $\forall \mathscr{A} \in \Gamma$，I$\models \mathscr{A}$

命题 3.40. *在一个给定的解释 I 中，若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 都为真，则 $\mathscr{B}$ 也为真。*

证明. 令 v 是 I 的任一赋值，由 $I \models \mathscr{A} \to \mathscr{B} \Rightarrow$v 满足 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$，即 v 要么满足 $\sim \mathscr{A}$，要么满足 $\mathscr{B}$

又由 $I \models \mathscr{A} \Rightarrow$v 满足 $\mathscr{A}$ ，不可能满足 $\sim \mathscr{A}$

故 v 满足 $\mathscr{B}$，即 $I \models \mathscr{B}$ □

命题 3.41. *令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，I 是一个解释，则 $I \models \mathscr{A}$ 当且仅当 $I \models (\forall x_i)\mathscr{A}$。*

证明. 设 $I \models \mathscr{A}$ ，令 v 是 I 的任一赋值，则 v 满足 $\mathscr{A}$

由于 I 中的每个赋值都满足 $\mathscr{A}$ ，则每个 i-等值于 v 的赋值 v' 也满足 $\mathscr{A}$ ，因而 v 满足 $(\forall x_i)\mathscr{A}$ ，即 $I \models (\forall x_i)\mathscr{A}$

反之，设 $I \models (\forall x_i)\mathscr{A}$，令 v 是 I 的任一赋值，则 v 满足 $(\forall x_i)\mathscr{A}$，即任一 i-等值于 v 的赋值 v' 都满足 $\mathscr{A}$ ，特别地，v 也满足 $\mathscr{A}$，即（I 的）任一赋值满足 $\mathscr{A}$，因此 $I \models \mathscr{A}$ □

推论 3.42. *令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，I 是一个解释，则 $I \models \mathscr{A}$ 当且仅当 $I \models (\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A}$ ，其中 $y_1,\cdots,y_n$ 为任意变元。*

命题 3.43. *在一个解释 I 中，赋值 v 满足 $(\exists x_i)\mathscr{A}$ ，当且仅当至少存在一个 i-等值于 v 的赋值 v'，v' 满足 $\mathscr{A}$。*

证明. 因 $(\exists x_i)\mathscr{A}$ 等价于 $\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$，则赋值 v 满足 $\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$，即 v 不满足 $(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$，则至少存在一个 i-等值于 v 的赋值 v'，使得 v' 不满足 $(\sim\mathscr{A})$，即 v' 满足 $\mathscr{A}$

反之亦然 □

定义 3.44. 设 $\mathscr{A}_0$ 是 L_0(命题逻辑) 中的一个公式，对 $\mathscr{A}_0$ 中的任一谓词（命题）符，用 L 中的一个公式去替换它在 $\mathscr{A}_0$ 中的处处出现，这样得到对应的一个 L 中的公式 $\mathscr{A}_0$，称之为 $\mathscr{A}_0$ 在 L 中的一个替换实例。

定义 3.45. L 中的一个公式 $\mathscr{A}$ 是重言式，若 $\mathscr{A}$ 是 L_0(命题逻辑) 中的一个重言式在 L 中的一个替换实例。

命题 3.46. *L 中的重言式在 L 的任何解释中都为真。*

证明. 设 $\mathscr{A}_0$ 是 L_0 中一个公式，且 $p_1,\cdots,p_n$ 是 $\mathscr{A}_0$ 中出现的所有命题（谓词）符，$\mathscr{A}$ 是通过用 L 中的公式 $\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_n$ 分别替换 $p_1,\cdots,p_n$ 在 $\mathscr{A}_0$ 中的处处出现而得到的公式。

令 I 是 L 的任一解释，v 是 I 中的任一赋值，构造一个 L 的赋值 v' 满足

$$v'(p_i)=T,\text{若}v\text{满足}\mathscr{A}_i;\text{否则},v'(p_i)=F,1\leq i\leq n$$

归纳可证：赋值 v 满足 A 当且仅当 $v'(\mathscr{A}_0)=T$

若 $\mathscr{A}_0$ 就是一个谓词符，如 p_n，则结论显然成立

(1) $\mathscr{A}_0$ 就是 $\sim\mathscr{B}_0$，则 $\mathscr{A}$ 就是 $\sim\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{B}_0$ 的一个替换实例

v 满足 $\mathscr{A}$ ⇔v 不满足 $\mathscr{B}$，由归纳假设 $\Leftrightarrow v'(\mathscr{B}_0)=F\Leftrightarrow v'(\mathscr{A}_0)=T$

(2) $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{B}_0\to\mathscr{C}_0$, 则 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}\to\mathscr{C}$，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 分别是 $\mathscr{B}_0$ 和 $\mathscr{C}_0$ 的替换实例

下列陈述等价

(a) v 满足 $\mathscr{A}$

(b) v 满足 $\sim\mathscr{B}$，或 v 满足 $\mathscr{C}$

(c) v 不满足 $\mathscr{B}$，或 v 满足 $\mathscr{C}$

(d) $v'(\mathscr{B}_0)=F$，或 $v'(\mathscr{E}_0)=T$

(e) $v'(\mathscr{B}_0\to\mathscr{C}_0)=T$

(f) $v'(\mathscr{A}_0)=T$

进一步，$\mathscr{A}_0$ 是 L 中的重言式，则对任意赋值 v' 都有 $v'(\mathscr{A}_0)=T$，就有赋值 v 满足 $\mathscr{A}$，考虑到 I 和 v 的任意性，命题成立 □

注 3.47. *重言式是命题逻辑的概念，只能通过替换实例引入一阶逻辑*

定义 3.48. 令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，$\mathscr{A}$ 称为闭（公）式（亦称句子 (sentence)），若 $\mathscr{A}$ 中没有自由出现的变元；称为开（公）式，若 $\mathscr{A}$ 中包含自由变元。

命题 3.49. *令 I 是一个解释，$\mathscr{A}$ 是一个公式。v 和 w 是 I 中的赋值，且对 $\mathscr{A}$ 中每个自由变元 x_i 都有 $v(x_i)=w(x_i)$，则 v 满足 $\mathscr{A}$ 当且仅当 w 满足 $\mathscr{A}$。*

证明. 若 $\mathscr{A}$ 是原子，如 $A_i^n(t_1,\cdots,t_n)$，只需考虑 $\mathscr{A}$ 中出现的自由变元和常元（函项符由此解释），对出现在 $t_1,\cdots,t_n$ 中的自由变元和个体常元，v 和 w 相同赋值

$v(t_i)=w(t_i)$ $1\leq i\leq n$

结论显然成立

(1)$\mathscr{A}$ 是 $\sim\mathscr{B}$

(2)$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}\to\mathscr{C}$

易证

(3)$\mathscr{A}$ 是 $\forall x_i \mathscr{B}$

($\Rightarrow$) 若 $v \models \mathscr{A}$ ，即 $v \models \forall x_i \mathscr{B}$，考虑 w' 是任一 i- 等值于 w 的赋值

因 x_i 不自由出现在 $\forall x_i \mathscr{B}$，有 $v(y) = w'(y)$，y 是 $\mathscr{A}$ 中自由变元，任一 i-等值于 v 的赋值 $v' \models \mathscr{B}$

特别，令 $v'(x_i) = w'(x_i), v'(x_j) = v(x_j), j \neq i$

则 $w'(y) = v'(y)$，y 是 B 中自由变元

据归纳假设（注意到 w' 与 v' 是 i-等值的）

$v \models \mathscr{B} \Rightarrow w' \models \mathscr{B}, w \models \forall x_i \mathscr{B}$，即 $w \models \mathscr{A}$

($\Leftarrow$) 同理可证 □

命题 3.50. 令 I 是一个解释，$\mathscr{A}$ 是一个闭式，则 $I \models \mathscr{A}$ 或 $I \models \sim \mathscr{A}$。

证明. 设 v 和 w 是 I 中任意两个赋值，则对 $\mathscr{A}$ 的任意自由变元 y （其实 $\mathscr{A}$ 中无自由变元出现）都有 $v(y) = w(y)$，则 v 满足 $\mathscr{A}$ 当且仅当 w 满足 $\mathscr{A}$ ，这意味着要么所有的赋值都满足 $\mathscr{A}$，要么没有赋值满足 $\mathscr{A}$，即 $\mathscr{A}$ 为真或 $\mathscr{A}$ 为假，亦即 $I \models \mathscr{A}$ 或 $I \models \sim \mathscr{A}$ □

定义 3.51. 令 $\mathscr{A}$ 是 L 的一个公式，$\mathscr{A}$ 是（逻辑）有效的（有效式），若 $\mathscr{A}$ 在 L 的每个解释下都为真，即对任一模型 I，$I \models \mathscr{A}$，记 $\models \mathscr{A}$

$\mathscr{A}$ 是矛盾的（不一致），若 $\mathscr{A}$ 在 L 的每个解释下都为假，亦即 $\sim \mathscr{A}$ 是有效的。

定义 3.52. 令 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是（L 的）公式，称 $\mathscr{A}$ 蕴涵 $\mathscr{B}$，记 $\mathscr{A} \models_K \mathscr{B}$（简记 $A \models \mathscr{B}$），若满足 $\mathscr{A}$ 的所有解释也满足 $\mathscr{B}$。即，$\mathscr{A}$ 的所有模型也是 $\mathscr{B}$ 的模型。

令 Γ 是一个公式集，$\mathscr{B}$ 是一个公式，$\Gamma \models \mathscr{B}$，若 $I \models \Gamma$ 则 $I \models \mathscr{B}$。称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 逻辑等价（简称等价），记 $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$，若 $\mathscr{A} \models \mathscr{B}$ 且 $\mathscr{B} \models \mathscr{A}$。

命题 3.53. 若 $\mathscr{A} \models_L \mathscr{B}$，则 $\mathscr{A} \models_K \mathscr{B}$；特殊地，若 $\models_L \mathscr{B}$，则 $\models_K \mathscr{B}$；若 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是重言等价，则它们也是逻辑等价

3.6 斯科伦化

定义 3.54. 若公式 $(\exists x_i)\mathscr{B}$ 出现在公式 $\mathscr{A}$ 中，且属于 $(\forall x_{i_1}), \cdots, (\forall x_{i_r})$ 的辖域，不妨设为 $\mathscr{B}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}, x_i)$，则可删除 $(\exists x_i)$，且以函项符 $h_i^r(x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})$ 替换 x_i，$h_i^r(x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})$ 称为斯科伦函项。

若 $(\exists x_i)$ 不出现在任何全称量词的辖域中，直接删除 $(\exists x_i)$ ，且以个体常元符 c_i 替换 x_i，c_i 称为斯科伦常元。这种做法称为公式的斯科伦化（Skolemisation），这样得到的公式称为 $\mathscr{A}$ 的斯科伦式。

命题 3.55. $\mathscr{A}$ 是一个公式，$\mathscr{A}$ 是矛盾的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 的斯科伦式是矛盾的

作业 7

1. 以下公式是否逻辑有效，试证之：
(a) $\exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 \exists x_1 A_1^2(x_1, x_2)$
(b)$\forall x_2 \exists x_1 A_1^2(x_1, x_2) \to \exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$
2. 给出一个逻辑有效开式的例子
3. 证明：若 t 是在公式 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由的项，则公式 $\mathscr{A}(t) \to \exists x_i \mathscr{A}(x_i)$ 是（逻辑）有效的。
4. 给出以下公式的 Skolem 式：

$$(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)((\sim A_1^2(x_1, x_2) \vee A_2^1(x_1)) \to A_2^2(x_3, x_4))$$

5. 令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是一个含自由变元 x_i 的公式，一个项 t 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由，设一个赋值 v 使

得 $v(t)=v(x_i)$，证明 $v\models\mathscr{A}(t)$ 当且仅当 $v\models\mathscr{A}(x_i)$。

4 一阶逻辑: 证明论

4.1 形式系统

定义 4.1. 令 L 是一阶语言，由下列公理和（演绎）规则定义形式系统 K_L

对 L 中的任何公式 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ ，下列是 K_L 的公理模式

$(K1)$ $(\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$

$(K2)$ $((\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C}))\to((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C})))$

$(K3)$ $(((\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{B}))\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$

$(K4)$ $((\forall x_i)\mathscr{A}\to\mathscr{A})$，$x_i$ 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现

$(K5)$ $((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)\to\mathscr{A}(t))\mathscr{A}(x_i)$ 为含 x_i 的公式，t 为项，且 t 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由

$(K6)$ $(\forall x_i)(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\mathscr{A}\to(\forall x_i)\mathscr{B})$，$\mathscr{A}$ 中不含变元 x_i 的自由出现

(R1) 分离规则（MP）若 $\mathscr{A},(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$ 则 $\mathscr{B}$，其中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为任意（一阶）公式

(R2) 概括规则（Gen (generAlizAtion)）若 $\mathscr{A}$ 则 $(\forall x_i)\mathscr{A}$，其中 $\mathscr{A}$ 为任意（一阶）公式，x_i 为任意变元

定义 4.2. K_L 中一个证明是指 L 中一个公式序列 $\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_n$，使得对每个 $i(1\le i\le n)$，$\mathscr{A}_i$ 或是 K_L 中的一个公理，或由此序列中位于 $\mathscr{A}_i$ 前面的公式应用 MP 或 Gen 而得

令 Γ 是 L 中公式集。K_L 中公式序列 $\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_n$ 是从 Γ 的一个演绎，若对每个 $i(1\le i\le n)$，下列之一成立：

(1) $\mathscr{A}_i$ 是 K_L 的公理；

(2) $\mathscr{A}_i$ 属于 Γ （$\mathscr{A}_i\in\Gamma$）；

(3) $\mathscr{A}_i$ 可由此序列中位于 $\mathscr{A}_i$ 前面的公式应用 MP 或 Gen 规则而得

定义 4.3. 若公式 $\mathscr{A}$ 是构成证明的某个序列的最后一项，$\mathscr{A}$ 称为 K_L 中的一个定理，记为 $\vdash_{K_L}\mathscr{A}$，简记 $\vdash_K\mathscr{A}$ 或 $\vdash\mathscr{A}$，若公式 $\mathscr{A}$ 是构成从 Γ 的演绎的某个序列的最后一项，$\mathscr{A}$ 称为 Γ 的一个后承，记为 $\Gamma\vdash_{K_L}\mathscr{A}$.

定理 4.4. *若 L 中公式 $\mathscr{A}$ 是重言式，则 $\mathscr{A}$ 是 K 中的定理*

证明. $\mathscr{A}$ 是重言式，则存在 L 中一个重言式 $\mathscr{A}_0$ 使得 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}_0$ 在 L 中的一个替换实例

由 L 的完全性，$\vdash_L\mathscr{A}_0$

即存在一个 L 中的证明序列，使得最后一项为 $\vdash_L\mathscr{A}_0$，由于 K 的公理模式包含 L 的公理模式，则通过对此序列进行替换操作，可得到 K 中的一个证明序列，使得最后一项为 $\mathscr{A}$，$\vdash_K\mathscr{A}$ □

命题 4.5. *K 中的公理模式 (K4)(K5)(K6) 的所有实例都是（逻辑）有效的*

证明. 设 I 是任一解释，v 为 I 的任一赋值

- (K4) 的证明

  若 $v\models\forall x_i\mathscr{A}$

  任一 i- 等值于 v 的赋值 $v'\models\mathscr{A}$，x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现（不需考虑自由变元赋值）

  特殊地，v 自身对 i 等值，有 $v\models\mathscr{A}$

$v \models \forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{A}$

$I \models \forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{A}$

考虑到 I 和 v 的任意性，就有 (K4) 是有效的

- (K5)

  令 t 是对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中 x_i 自由的

  若 $v \models \forall x_i \mathscr{A}(x_i)$（需证 $v \models \mathscr{A}(t)$）

  任一 i- 等值于 v 的赋值 $w \models \mathscr{A}(x_i)$

  特别地，对满足 $v'(x_i) = v(t)$ 的 i- 等值于 v 的赋值 $v' \models \mathscr{A}(x_i)$

  $v \models \mathscr{A}(t)$ （4.38） $v \models \forall x_i \mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t)$

  $I \models \forall x_i \mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t)$

  考虑到 I 和 v 的任意性，就有 (K5) 是有效的

- (K6)

  令 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是公式，x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现

  若 $v \models \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

  任一 i- 等值于 v 的赋值 $w \models \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，$w \not\models \mathscr{A}$ ，或 $w \models \mathscr{B}$

  因 $\mathscr{A}$ 中不含 x_i 的自由出现，据3.49（因 $v(x_i) = w(x_i)$ 作为特殊情况自然成立，有 $w \models \mathscr{A} \Leftrightarrow v \models \mathscr{A}$）

  若有一 w 不满足 $\mathscr{A}$ ，则所有的 w 都不满足 $\mathscr{A}$，v 就是这样的 w

  $v \not\models \mathscr{A}$ ，或任一 i- 等值于 v 的赋值 $w \models \mathscr{B}$

  $v \not\models \mathscr{A}$ ，或 $v \models \forall x_i \mathscr{B}$

  $v \models \mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B}$

  $I \models \mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B}$

  考虑到 I 和 v 的任意性，就有 (K6) 是有效的

□

定理 4.6. *对任一 L 中的公式 $\mathscr{A}$，若 $\vdash_K \mathscr{A}$，则 $\models_K \mathscr{A}$，即 $\mathscr{A}$ 是有效的*

证明.（对证明步数归纳）

起步：若 $\mathscr{A}$ 的证明只有一步，则 $\mathscr{A}$ 是某条公理，已证公理都是有效的

归纳步: 设关于 $\mathscr{A}$ 的证明有 n ($n > 1$) 步，归纳假定若 C 在 K 中的证明少于 n 步，则 C 是有效的

$\mathscr{A}$ 是公理，则 $\mathscr{A}$ 是有效的

若 $\mathscr{A}$ 是由证明序列中 $\mathscr{A}$ 前面的两个公式 $\mathscr{B}$ 和 $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ 应用 MP 而得

由归纳假定，$\mathscr{B}$ 和 $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ 都是有效的，从而 $\mathscr{A}$ 是有效的

若 $\mathscr{A}$ 是由证明序列中 $\mathscr{A}$ 前面的公式应用 Gen 而得，即 $\mathscr{A}$ 是 $\forall x_i \mathscr{C}$

由归纳假定，$\mathscr{C}$ 是有效的，从而 $\mathscr{A}$ 是有效的。 □

定义 4.7. 令 Γ 是一个公式集且 $\mathscr{A} \in \Gamma$，设存在一个从 Γ 可演绎的序列 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$，其每步 $\mathscr{A}_i (1 \leq i \leq n)$ 都有理由，$\mathscr{A}_i$ 依据于 $\mathscr{A}$ 当且仅当 $\mathscr{A}_i$ 就是 $\mathscr{A}$ 且 $\mathscr{A}_i$ 的理由属于 Γ，或 $\mathscr{A}_i$ 的理由是 MP 或 Gen，即 $\mathscr{A}_i$ 是由前面的公式用 MP 或 Gen 所得，而前面的公式中至少有一个公式的依据为 $\mathscr{A}$.

定理 4.8 (演绎定理). 令 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是(*L* 中的)公式,Γ 是(Γ 中的)公式集(可能为空)。若 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_K \mathscr{B}$,且演绎对涉及 $\mathscr{A}$ 中自由出现的变元没有使用过 *Gen*,则 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

证明. 归纳法

演绎序列只有一个公式,则此公式就是 $\mathscr{B}$

(1) $\mathscr{B}$ 是 K 中的公理,

(2) $\mathscr{B} \in \Gamma$,

(3) $\mathscr{B}$ 就是 $\mathscr{A}$

即 L 中演绎定理的证明

设从 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ 到 $\mathscr{F}$ 的演绎序列步数小于 n(n>1) 的所有公式 $\mathscr{F}$,对 $\mathscr{A}$ 中自由变元没用过 Gen,假设欲证结论 $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{F}$ 都成立

若 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash \mathscr{B}$,令其演绎序列长度为 n,有如下三种情况

- $\mathscr{A}$ 是 K 中的公理,或 $\mathscr{B} \in \Gamma$,或 $\mathscr{B}$ 就是 $\mathscr{A}$,与前面类似
- $\mathscr{B}$ 由演绎中较前的两个公式用 MP 而得,与 L 中演绎定理类似
- $\mathscr{B}$ 由演绎中前面的公式用 Gen 而得,如 $\mathscr{B}$ 为 $(\forall x_i)\mathscr{C}$

$$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash \mathscr{C} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{C}$$

有两种情况

(1) 若演绎中没使用 Gen 且 x_i 在 $\mathscr{A}$ 中自由出现,意味着演绎中不依据于 $\mathscr{A}$,有 $\Gamma \cup \mathscr{A} \vdash \mathscr{C} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathscr{C}$

记 (1)-(k) 为 Γ 到 $\mathscr{C}$ 的演绎,则存在 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 的演绎 (1)-(k+3),其中

$$\begin{aligned}
&(k+1)\ \forall x_i\mathscr{C} \qquad (k)(Gen)\\
&(k+2)\ \forall x_i\mathscr{C} \to (\mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{C})\\
&(k+3)\ \mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{C} \qquad (k+1)(k+2)(MP)
\end{aligned}$$

(2) x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现(满足下面 (K6) 的条件)

存在一个步数为 k 的从 Γ 到 $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 的演绎,则存在 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 的演绎 (1)-(k+3),其中

$$\begin{aligned}
&(k+1)\ \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \qquad (k)(Gen)\\
&(k+2)\ \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \to (\mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{C})\\
&(k+3)\ \mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{C} \qquad (k+1)(k+2)(MP)
\end{aligned}$$

□

推论 4.9. 若 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_K \mathscr{B}$,且 $\mathscr{A}$ 是一个闭式,则 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

定理 4.10 (演绎定理的逆). 若 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{B}$,则 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_K \mathscr{B}$,这里 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是公式,Γ 是公式集(可能为空)

4.2 导出规则

定义 4.11.

(R3) 若 t 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由,则 $\forall x_i\mathscr{A}(x_i) \vdash \mathscr{A}(t)$ (特例规则)

特别地,$\forall x_i\mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$

(R4) 若 t 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由，$\mathscr{A}(t,t)$ 是用 t 替换 $\mathscr{A}(x_i,t)$ 中自由 x_i 的处处出现，则 $\mathscr{A}(t,t) \vdash \exists x_i \mathscr{A}(x_i,t)$ （存在规则）

作业 8

1. 证明以下各式是 K_L 的定理，要求写出形式证明：
(a) $\forall x_1(A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1))$
(b) $\exists x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B})$，$x_i$ 不在 $\mathscr{B}$ 中自由出现
(c) $(\exists x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$，$x_i$ 不在 $\mathscr{B}$ 中自由出现
(d) $\sim \forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \sim \mathscr{A}$
2. (a) 指出下列形式证明是否有错：

$$
\begin{aligned}
&(1)\ (\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \qquad \text{假设}\\
&(2)\ (\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \qquad (1), \text{概括}\\
&(3)\ (\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2) \qquad (K5)\\
&(4)\ (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2) \qquad (2),(3), MP
\end{aligned}
$$

因此，$(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2)$
故由演绎定理 $\vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2)$
(b) 给出一个合适的解释，证明公式 $\vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2)$ 不是逻辑有效的，因此不是 K 的定理。
3. [附加题]
谓词演算 K# 修改 K 如下
· 增加公理 (K7)
$(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A}$ ，$\mathscr{A}$ 是 K 的公理，$y_1\cdots y_n$ 是任意变元（$n \geq 0$，当 n = 0 时即 $\mathscr{A}$）；(K7)
$(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A} \to \mathscr{B} \to ((\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A} \to (\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{B})$，$\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是公式，$y_1\cdots y_n$ 是任意变元
· MP 是唯一规则
证明：K# 与 K 具有相同的定理集

4.3 等价和替换

命题 4.12. 对（L 中）任意公式 $\mathscr{A},\mathscr{B}$，$\vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ 当且仅当 $\vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 且 $\vdash \mathscr{B} \to \mathscr{A}$。

证明. (⇒) 若 $\vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$，即 $\vdash \sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$
易验重言式
$\sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 和 $\sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$
它们都是 K 中定理，用 MP 得 $\vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 且 $\vdash \mathscr{B} \to \mathscr{A}$
(⇐) 若 $\vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 且 $\vdash \mathscr{B} \to \mathscr{A}$
易验重言式 $(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to \sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$
它是 K 中定理，用两次 MP 得 $\vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ □

定义 4.13. 若（L 中）公式 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 满足 $\vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$，则称 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是可证等价的。

命题 4.14 (变元换名)**.** 若 x_i 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中自由出现，且 x_j 是不在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中自由或约束出现的变元，则 $\vdash (\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow (\forall x_j)\mathscr{A}(x_j))$。

证明. 只证明一边，另一边同理

$$\begin{aligned}
&(1)\ (\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \\
&(2)\ (\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(x_j) \qquad (K5) \\
&(3)\ \mathscr{A}(x_j) \qquad (1)(2)(MP) \\
&(4)\ \forall(x_j)\mathscr{A}(x_j) \qquad (Gen)
\end{aligned}$$

由于 x_j 不在 $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$ 中自由出现，由演绎定理成立。 □

命题 4.15. 令 $\mathscr{A}$ 是 L 中公式，$y_1, \cdots, y_n$ 是 $\mathscr{A}$ 中自由变元，则 $\vdash \mathscr{A}$ 当且仅当 $\vdash (\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A}$。

证明. 利用 (Gen)(K5) 和归纳法。 □

定义 4.16. 令 $\mathscr{A}$ 是 L 的一个只包含自由变元 $y_1, \cdots, y_n$ 的公式，则 $(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的全称闭式（universal closure），记作 $\mathscr{A}'$。

注 4.17. *4.15*表明：$\vdash \mathscr{A}$ 当且仅当 $\vdash \mathscr{A}'$，在可证前提下，如数学，不需要自由变元

但 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}'$ 并不是可证等价的，$\vdash \mathscr{A}' \to \mathscr{A}$ 但反之不成立。

定理 4.18. 令 $\mathscr{A}$ $\mathscr{B}$ 是 L 中公式，设 $\mathscr{B}_0$ 是通过用 $\mathscr{B}$ 替换 $\mathscr{A}_0$ 中 $\mathscr{A}$ 的一次或多次出现所得的公式，则 $\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$

推论 4.19. 令 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{A}_0, \mathscr{B}_0$ 如同*4.18*所述，若 $\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$，则 $\vdash (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$，若 $\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ 且 $\vdash \mathscr{A}$，则 $\vdash \mathscr{B}$。

4.4 前束范式和子句范式

命题 4.20. 令 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是（L 的）公式

(1) 若 x_i *不在* $\mathscr{A}$ *中自由出现，则*

(a) $\vdash (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$

(b) $\vdash (\exists x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow (\mathscr{A} \to (\exists x_i)\mathscr{B})$

(2) 若 x_i *不在* $\mathscr{B}$ *中自由出现，则*

(a) $\vdash (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow ((\exists x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

(b) $\vdash (\exists x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow ((\exists x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

(3) (a) $\vdash \sim (\forall x_i)\mathscr{A} \leftrightarrow (\exists x_i) \sim \mathscr{A}$

(b) $\vdash \sim (\exists x_i)\mathscr{A} \leftrightarrow (\forall x_i) \sim \mathscr{A}$

定义 4.21. L 的公式 $\mathscr{A}$ 称为前束范式，若它具有如下形式：$(Q_1 x_{i_1})(Q_2 x_{i_2})\cdots(Q_k x_{i_k})\mathscr{D}$，其中 $\mathscr{D}$ 是 L 中不带量词的公式，每个 Q_i 是 $\forall$ 或 $\exists$

定义 4.22. 对前束范式 $(Q_1 x_{i_1})(Q_2 x_{i_2})\cdots(Q_k x_{i_k})\mathscr{D}$，其中 D 是 CNF（DNF），称为前束合取（析取）范式

命题 4.23. 对 L 中任何公式 $\mathscr{A}$ ，都存在一个前束范式 $\mathscr{B}$ 与它是可证等价的

定义 4.24.

(1) 令 n > 0，一个前束范式称为一个 Π_n 式，若它以全称量词开始，并且有 n - 1 次量词的交叉

(2) 令 n > 0，一个前束范式称为一个 Σ_n 式，若它以存在量词开始，并且有 n - 1 次量词的交叉

命题 4.25. 设 $\mathscr{A}^s$ 是一个公式 $\mathscr{A}$ 的斯科伦式，则 $\mathscr{A}^s \vdash \mathscr{A}$

定理 4.26 (弱等价性定理). 令 K^s 是把 K 的每个公理 $\mathscr{A}$ 都换成它的斯科林式 $\mathscr{A}^s$ 而得，则

(1) 若 $\mathscr{B}$ 是 K 的公式且 $\vdash_{K^s} \mathscr{B}$，则 $\vdash_K \mathscr{B}$

(2) K 是一致的，当且仅当 K^s 是一致的

定义 4.27. 一个文字是一个原子或原子的否定式

一个子句是指一些文字的析取，即每个析取项都是一个原子或者原子的否定式

定义 4.28. 一个公式被称为子句（范）式（亦即合取范式），若它是一些子句的合取

命题 4.29. *L 中任一非重言式的公式都有一个弱等价于它的子句（范）式*

证明. 通过下列步骤（算法）可得到一个给定公式的子句式

1 求前束范式（可证等价）

2 将前束范式斯科伦化

3 删除所有全称量词

4 将每个原子看作命题变元，按命题演算得到合取范式（对非重言式逻辑等价）

5 每个合取项就是子句 □

作业 9

1. 证明: (a) $\forall x_1\forall x_2 A_1^2(x_1,x_2) \vdash_K \forall x_2\forall x_3 A_1^2(x_2,x_3)$

(b) $\forall x_1\forall x_2 A_1^2(x_1,x_2) \vdash_K \forall x_1 A_1^2(x_1,x_1)$

2. 令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是一个 L 的公式，其中 x_i 自由出现，设 x_j 不在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中出现（自由或约束出现），证明:$\vdash_K \exists x_i\mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow \exists x_j\mathscr{A}(x_j)$

3. 对下列公式，给出子句范式:

(b) $\forall x_1(A_1^2(x_1,x_2) \to \forall x_2 A_1^2(x_1,x_2))$

(c) $\forall x_1(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_1,x_2)) \to (\exists x_2 A_1^1(x_2) \to \exists x_3 A_1^2(x_2,x_3))$

4. 令 $\mathscr{A}(x_1)$ 是一个其中 x_2 不出现的公式，$\mathscr{B}(x_2)$ 是一个其中 x_1 不出现的公式，设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 不含量词。

证明公式:$\exists x_1\mathscr{A}(x_1) \to \exists x_2\mathscr{B}(x_2)$

是可证等价于有 Π_2 和 Σ_2 式的前束范式。

5. [附加题]

定理: 一个等腰三角形有两个等角。要求用一阶逻辑给出该定理的形式化前提、结论和证明。[提示: 设常元 a,b,c 表示三角形的三个顶点，令谓词符 $T(x,y,z)$ 表示点 x,y,z 组成一个三角形，$C(u,v,w,x,y,z)$ 表示三角形 uvw 与三角形 xyz 全等，$S(u,v,x,y)$ 表示线段 uv 与线段 xy 相等，$A(u,v,w,x,y,z)$ 表示角 uvw 与 xyz 为等角。]

4.5 完全性定理

定理 4.30 (L 的完全性定理). *若 L_0 的公式 $\mathscr{A}$ 是重言式，则 $\mathscr{A}$ 是 L 的定理，若 $\models_L \mathscr{A}$ ，则 $\vdash_L \mathscr{A}$*

定义 4.31. K 的一个扩充是通过修改或扩大的公理集使得 K 的所有定理仍是定理（可能引入新的定理）而得的形式系统

定义 4.32. 一个一阶系统（first-order system）是指 K_L 的一个扩充，其中 L 为一个一阶语言

定义 4.33. 令 S 是一致的一阶系统，且闭式 $\mathscr{A}$ 不是 S 中的定理，则把 $\sim\mathscr{A}$ 作为一个公理加进 S 的扩充 S* 也是一致的

定义 4.34. 一个一阶系统 S 是完全的，若对每个闭式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 或 $\sim\mathscr{A}$ 是 S 的定理

类似 L 的完全性定理的讨论，有

定理 4.35 (Lindenbaum 引理)**.** *若 S 是一致的一阶系统，则存在一个 S 的一致完全扩充*

定义 4.36. L 的一个扩展 L+ 是通过在 L 中引入一个（可能可数无穷）常元系列 $b_0, b_1, b_2, \cdots$ 定义的。

命题 4.37. *若 S 是一个 K_L 的一致扩充，则新（一阶）系统 $S+$ 作为 S 在 $L+$ 的扩充亦是一致的。*

证明. 设若 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都是 S+ 的定理，它们的证明作为一个有限的公式序列仅含有限个 $b_0, b_1, \cdots b_n$

其（在 S+ 的）证明可通过用（L 中没用过的）变元（或常元）替换（L + 中）相应的常元（如某些 b_i）为 S 中的证明，因这样的符号替换符合表达式的语法（演算中只考虑符号不需语义解释）

例如，$\sim\forall x_1 A_1^1(x_1) \to\sim A_1^1(b_1) \Rightarrow\sim\forall x_1 A_1^1(x_1) \to\sim A_1^1(x_2)$

$\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都是 S 的定理，这是不可能的 □

命题 4.38. *令 S 是 K_L 的一个一致扩充，则存在一个 L 的解释，使得 S 中的每个定理在此解释下为真。*

证明. 令 L+ 是 L 的一个（项）扩展，S+ 和 K+ 分别是 S 和 K_L 的扩充。

S+ 是一致的。

定义一个一阶系统系列 $S_0, S_1, \cdots$ 如下:

首先，枚举 L+ 中仅含一个自由变元的公式，如 $\mathscr{F}_0(x_{i_0}), \mathscr{F}_1(x_{i_1}), \mathscr{F}_2(x_{i_2}), \cdots$，其中 $x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots$ 不必是不同的，

选择 $b_0, b_1, \cdots$ 中的一个（可能可数无穷）子序列 $c_0, c_1, \cdots$ 使得

(1) c_0 不在 $\mathscr{F}_0(x_{i_0})$ 出现；

(2) 对 $n > 0$，$c_n \notin \{c_0, \cdots, c_{n-1}\}$ 且不在 $\mathscr{F}_0(x_{i_0}), \mathscr{F}_1(x_{i_1}), \cdots, \mathscr{F}_n(x_{i_n})$ 中任一公式中出现。

这是因为每个公式仅含 $b_0, b_1, \cdots$ 中的有限个出现（若有的话）。

对每个 k，记 $\mathscr{G}_k$ 为以下公式

$$\sim\forall x_{i_k}\mathscr{F}_k(x_{i_k}) \to\sim \mathscr{F}_k(c_k)$$

令 S_0 为 S+，令 S_1 是通过在 S_0 中引入 $\mathscr{G}_0$ 作为一个新公理得到的扩充。

对 $n > 1$，令 S_n 是通过在 S_{n-1} 引入 $\mathscr{G}_{n-1}$ 作为一个新公理得到的扩充。

证明的过程是欲证每个 S_n 是一致的，由此从 S_i 系列获得一个一致的 S_∞，应用 Lindenbaum 引理获得 S_∞ 的一个一致完全扩充，从而能够构造所需的解释。

构造所需的解释

定义 L+ 的一个解释 I 如下:

(a) 论域 D_I 是 L+ 中所有闭项的（能枚举）集；

(b) 个体常元是它们自身的解释；

(c) 对 $d_1, \cdots, d_n \in D_I$:

$$A_i^n(d_1, \cdots, d_n)\text{可满足，若} \vdash_T A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$$

$$A_i^n(d_1, \cdots, d_n)\text{不可满足，若} \vdash_T\sim A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$$

(d) 对 $d_1, \cdots, d_n \in D_I$，$f_i^n(d_1, \cdots, d_n)$ 赋值为 $\bar{f}_i^n(d_1, \cdots, d_n)$。

现需证明：S 中的每个定理在 I 下为真。

注：D_I 是能枚举的，意味着所构造是能枚举的模型。

引理 4.39. 对 $L+$ 的任一闭式 $\mathscr{A}$ ，$\vdash_T \mathscr{A}$ 当且仅当 $I \models \mathscr{A}$。

(结构归纳)

令 $\mathscr{A}$ 是原子，如 $A_i^n(d_1,\cdots,d_n)$，$d_1,\cdots,d_n$ 是项。若 $\vdash_T \mathscr{A}$，则 $\vdash_T A_i^n(d_1,\cdots,d_n)$，则 $I \models \mathscr{A}$，反之类似。

假设结果对每个比 $\mathscr{A}$ 短的公式都成立。

(1) $\mathscr{A}$ 是 $\sim \mathscr{B}$

$\vdash_T \mathscr{A}$，$\vdash_T \sim \mathscr{B}$，即 $\mathscr{B}$ 不是 T 的定理。因 T 是一致的，由归纳假设，$\mathscr{B}$ 在 I 下不为真。因 $\mathscr{B}$ 是闭的，故 $\sim \mathscr{B}$ 在 I 下为真，则 $I \models \mathscr{A}$，反之亦然。

(2) $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$

设若 $\mathscr{A}$ 在 I 下不为真，$\mathscr{B}$ 为真且 $\mathscr{C}$ 为假，$\vdash_T \mathscr{B}$ 且 $\nvdash_T \mathscr{C}$（归纳假设）。

因 T 是完全的，$\vdash_T \mathscr{B}$ 且 $\vdash_T \sim \mathscr{C}$，考虑 $\vdash_T \mathscr{B} \to (\sim \mathscr{C} \to \sim (\mathscr{B} \to \mathscr{C}))$ 是一个重言式实例，用 MP 两次，有 $\vdash_T \sim (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$，则 $\vdash_T \sim \mathscr{A}$。

因 T 是一致的，故 $\mathscr{A}$ 不是 T 的定理。

反之亦然。

(3) $\mathscr{A}$ 是 $\forall x_i \mathscr{B}(x_i)$

若 x_i 不在 $\mathscr{B}$ 中自由出现，则 $\mathscr{B}$ 是闭的，$\vdash_T \mathscr{B}$ 当且仅当 $I \models \mathscr{B}$（归纳假设）。

已知 $\vdash_T \mathscr{B}$ 当且仅当 $\vdash_T \forall x_i \mathscr{B}$，$I \models \mathscr{B}$ 当且仅当 $I \models \forall x_i \mathscr{B}$，$\vdash_T \mathscr{A}$ 当且仅当 $I \models \mathscr{A}$。

若 x_i 在 $\mathscr{B}$ 中自由出现，因 $\mathscr{A}$ 是闭的，则 x_i 是 $\mathscr{B}(x_i)$ 中唯一的自由变元，$\mathscr{B}(x_i)$ 是 $\mathscr{F}_0(x_{i_0}),\mathscr{F}_1(x_{i_1}),\cdots$ 中的一个公式，如 $\mathscr{B}(x_i)$ 是 $\mathscr{F}_m(x_{i_m})$，$\mathscr{A}$ 是 $\forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$，设 $I \models \mathscr{A}$，$I \models \forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m}) \to \mathscr{F}_m(c_m)$，$I \models \mathscr{F}_m(c_m)$，$\mathscr{F}_m(c_m)$ 中的连接词和量词比 $\mathscr{A}$ 少，由归纳假设 $\vdash_T \mathscr{F}_m(c_m)$。

欲证 $\vdash_T \mathscr{A}$ ，设若反之，即 $\vdash_T \sim \mathscr{A}$ ，因 T 是完全的，

$$\vdash_T \sim \forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$$

因 $\mathscr{G}_m$ 是 T 的公理，

$$\vdash_T \sim \forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m}) \to \sim \mathscr{F}_m(c_m)$$

用 MP，$\vdash_T \sim \mathscr{F}_m(c_m)$，这与 T 的一致性矛盾。

反之，令 $\vdash_T \mathscr{A}$，设若 $\mathscr{A}$ 在 I 下不为真，

$$I \not\models \forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$$

存在 $d \in D_I$ 使得 $I \models \sim \mathscr{F}_m(d)$

这是因为，存在 I 中的一个赋值不满足 $\forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$，即存在一个赋值 v 不满足 $\mathscr{F}_m(x_{i_m})$，由于 $v(x_{i_m}) \in D_I$，即 $v(x_{i_m})$ 是闭项，设如 d，这样的 d 必是在 $\mathscr{F}_m(x_{i_m})$ 中对 x_{i_m} 自由的，此外，v(d) = d，这样，$v(x_{i_m}) = v(d)$，v 不满足 $\mathscr{F}_m(d)$，即 $\mathscr{F}_m(d)$ 不在 I 下为真

但因 $\vdash_T \forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$ ，由公理 (K5) 并用 MP

$$\vdash_T \mathscr{F}_m(d)$$

由归纳假设，$I \models \mathscr{F}_m(d)$

$\mathscr{F}_m(d)$ 与 $\sim \mathscr{F}_m(d)$ 不可能同时在 I 下为真。

因 T 是 S 的扩充，每个 S 的定理也是 T 的定理，每个 L+ 中作为 S 的定理的公式在 I 下为真，每个 S 的定理是 L 的公式，I 包含（满足）一些不在 L 中的公式。

限制 I 如下：排除对个体常元 $b_0,b_1,\cdots$ 以及基于它们的项的解释，保留 D_I 不变，由此获得一个 L 的解释，且 S 的每个定理在该解释下为真。 □

定理 4.40. 若 L 中的公式 $\mathscr{A}$ 是有效的，则 $\mathscr{A}$ 是 K_L 中的定理。

证明. 令 $\mathscr{A}$ 是有效的公式，$\mathscr{A}'$ 是 $\mathscr{A}$ 的全称闭式，则 $\mathscr{A}'$ 也是有效的。

设若 $\mathscr{A}$ 不是 K_L 的定理，$\mathscr{A}'$ 不是 K_L 的定理，包含 $\sim\mathscr{A}'$ 作为公理的扩充 K_L' 是一致的。

存在一个 L 的解释使得 K_L' 中每个定理在此解释下为真，特别地，$\sim\mathscr{A}'$ 在此解释下为真，$\mathscr{A}'$ 为假（$\mathscr{A}'$ 肯定为闭的），这与 $\mathscr{A}'$ 的有效性矛盾，故 $\mathscr{A}$ 是 K_L 的定理。 □

推论 4.41 (可靠与完全性定理). 对 L 中的任一公式 $\mathscr{A}$ ，$\vdash\mathscr{A}$ 当且仅当 $\models\mathscr{A}$

4.6 模型和一致性

定义 4.42.

(1) 令 Γ 是 L 的一个公式集，I 是 L 的一个解释，若 Γ 中每个公式都在 I 下都为真，则称 I 是 Γ 的一个模型；

(2) 若 S 是一个一阶系统，则 S 的一个模型是指使得 S 中每个定理都为真的一个解释。

命题 4.43. 令 S 是一个一阶系统，I 是 L 的一个解释，且 S 中每个公理在 I 下都为真，则 I 是 S 的一个模型

命题 4.44 (弱完全性定理). 一个一阶系统 S 是一致的，当且仅当它有模型

命题 4.45. 令 S 是一个一致一阶系统，$\mathscr{A}$ 是一个闭式，若 $\mathscr{A}$ 在 S 的每一个模型下都为真，则 $\mathscr{A}$ 为 S 中的定理。

证明. 设若 $\mathscr{A}$ 不是 S 的定理，补充 $\sim\mathscr{A}$ 作为一个公理得到 S 的扩充 S* 也是一致的

存在 S* 的一个模型 M 使得 $\sim\mathscr{A}$ 在 M 下为真，$\mathscr{A}$ 在 M 下为假，由于 M 也是 S 的模型，这与假设矛盾。 □

定理 4.46 (Löwenheim-Skolem 定理). 若一个一阶系统 S 有模型，则 S 具有一个其论域为可数集的模型

证明. 若 S 有模型，S 是一致的，由4.38的证明可知 S 有一个特殊的模型，此模型的论域是可数集，此论域由闭项构成，这闭项集是可数（无穷）的 □

命题 4.47 (紧致性 (Compactness) 定理). 若一个一阶系统 S 的公理集的任意有限子集都有模型，则 S 也有模型

证明. 设若 S 的公理集的任意有限子集都有模型，但 S 没有模型，则 S 是不一致的，存在公式 $\mathscr{A}$，$\vdash_S\mathscr{A}$ 和 $\vdash_S\sim\mathscr{A}$

不妨设这两个证明中涉及的公理集为 Γ，Γ 为一个有限公理子集。

设 Γ 的模型为 I，$\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 在 I 下都为真，这是不可能的。 □

推论 4.48. 令 Γ 是 K_L 的一个无限公式集，当 Γ 的任意有限子集都有模型时，Γ 有模型

定义 4.49. 给定一个模型 I（一个模型赋予每个闭式真值），定义一个形式系统 S(I) 如下：把所有在 I 中为真的公式作为公理，即 S(I) 的公理都是 S(I) 的定理。

命题 4.50. 设 $S(I)$ 是由模型 I 生成的形式系统，则 $S(I)$ 是一致且是完全的。

注 4.51. 设 S 是一个一致的一阶系统，则 S 有一个模型 I，在 I 下，$\mathscr{A}$ 为真或 $\sim\mathscr{A}$ 为真；又设 S 是不完全的，即存在闭式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都不是 S 的定理。由 S 的 I 可生成一个新的一阶系统 $S(I)$，$S(I)$ 是完全的。

定义 4.52. 一个 K 的不可判定句子是一个闭式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都不是 K 的定理。

定义 4.53. 一个一阶系统 S 是公理化的，若存在一种能行的方法判定任一给定的公式是否为公理。

命题 4.54. K_L 是不可判定的，即不存在一种能行的方法判定任一公式是否为定理；但是 K_L 是半可判定的，即若一个公式是定理，则存在一种能行的方法判定之

证明.（半可判定性）K 是公理化的，能枚举 K 的（所有）定理如下能行（能枚举）过程：设一个（定理）表，初始为空，枚举过程加定理入表

(1) 加 K 的第 1 条公理（实例），以及从这条公理用 MP 和 Gen 所得直接后承入表，Gen 仅用一次，引入变元 x_1

(2) 加 K 的第 k 条公理，以及从这条公理用 MP 和 Gen 所得直接后承入表，Gen 仅用一次，引入变元 $x_1, \cdots, x_k$

依此类推，因 K 是完全的，对任何公式（闭式）$\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 或 $\sim\mathscr{A}$ 为定理，等到定理出现最终（所有定理）都会被加入表。

然而，任给一个公式，在未找到证明之前，无论进行多少步，都无法判断未来某几步后是否会成为定理，故不可轻易判定为错。 □

作业 10

1. 证明：K_L 的扩充 S 是不一致的当且仅当 L 的每个公式都是 S 的定理。
2. 令 S 是一个一致一阶系统，使得对每个 S 的闭式 $\mathscr{A}$，若包 $\mathscr{A}$ 作为补充公理获得的（一阶）系统是一致的，则 $\mathscr{A}$ 是一个 S 的定理，证明 S 是完全的。
3. 令 L 是一个具有无穷多个谓词符的一阶语言，证明 K_L 具有无穷多个不同的一致扩充。
4. 令 Γ 是一个 L 的公式集，M 是一个 Γ 的模型，证明若 $\Gamma \vdash_{K_L} \mathscr{A}$ ，则 $\mathscr{A}$ 在 M 中为真；反之亦然?
5. 令 S 是一个 K_L 的一致扩充，M 是一个 S 的模型，定义一个 S 的扩充 S* 如下：包含所有 L 的在 M 中为真的闭原子和在 M 中不为真的闭原子的否定式作为补充公理，证明 S* 是一致的。问 S* 必是完全的吗?
6. [附加题]

(1) 令 K_1 和 K_2 是同一个一阶语言 L 的两个一阶理论，假设对 L 的任一解释 M，M 是 K_1 的模型当且仅当 M 不是 K_2 的模型。证明 K_1 和 K_2 是有限公理化，即存在有限公式集 Γ 和 Δ，使得对任一公式 $\mathscr{A}$，$\vdash_{K_1} \mathscr{A}$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A}$，$\vdash_{K_2} \mathscr{A}$ 当且仅当 $\Delta \vdash \mathscr{B}$。[提示：反证]

(2) 一个公式集 Γ 称为一阶理论 K' 的独立公理化，若

(a) 所有 Γ 中的公式是 K' 的定理；

(b) 对任一 K' 的定理 $\mathscr{A}$ ，$\Gamma \vdash_K \mathscr{A}$ ；

(c) 对 Γ 的任一公式 $\mathscr{B}$，$\Gamma - \{\mathscr{B}\} \nvdash_K \mathscr{B}$。证明每个一阶理论 K' 都有一个独立公理化。[提示：考虑演绎系列]

(3) 一个（一阶）理论 K* 称为替罪羊理论（scapegoat theory），若对任一仅含一个自由变元 x 的公式 $\mathscr{A}(x)$，存在一个闭项 t 使得 $\vdash_{K*} (\exists x) \sim \mathscr{A}(x) \to \sim \mathscr{A}(t)$。K* 称有见证性（witness property），若对任一仅含一个自由变元 x 的公式 $\mathscr{A}(x)$ 有 $\vdash_{K*} (\exists x) \sim \mathscr{A}(x)$，则存在一个闭项 t 使得 $\vdash_{K*} \sim \mathscr{A}(t)$（这样的理论通常是可构造的）。证明以下命题：

(a) 一个理论是替罪羊理论，当且仅当它有见证性；

(b) 一个理论是替罪羊理论，当且仅它当对任一仅含一个自由变元 x 的公式 $\mathscr{A}(x)$，存在一个闭项 t 使得 $\vdash_{K*} (\exists x)\mathscr{A}(x) \to \mathscr{A}(t)$；

(c) 没有谓词演算是替罪羊理论（如 K 不是替罪羊理论）。

5 数学基础

5.1 数学系统

注 5.1.

- 逻辑演算是刻画形式推理，尤其是数学中的精确推理
- 一阶语言 L 是普适的，L 中的符号可以不同方式解释
- 一阶逻辑 K_L 是足够一般的，K_L 中的定理可解释为真理
- 对任一 L，有一类公式不依赖于对符号的解释，即逻辑有效的公式，亦即 K_L 中的定理
- 当 L 中的（非逻辑）符号用数学方式解释，K_L 中的定理可解释为数学中的真理，它们之所以为数学真理是基于逻辑的结构，而不依赖于具体的数学背景

定义 5.2. 一个一阶理论（first-order theory，简称理论）作为一阶系统是 K_L 的某个通过增加公理的扩充，通过引入合适公理集来扩充逻辑公理 (K1)-(K6)。一个一阶理论的模型是一个解释，使其所有公理为真

一个数学系统作为一阶理论引入合适公理集来扩充 K_L，使得系统中的定理表示某个数学领域（尽可能多）的数学定理以及逻辑定理。

注 5.3 (Hilbert 论题)**.**

- 一阶逻辑之外无逻辑
- 为显式地表达数学（逻辑外）的假设，所需的公理总能用一阶逻辑表达
- 数学中非形式化的证明能用一阶逻辑中形式化的证明精确地表达

5.2 带等词的一阶系统

定义 5.4. 令 L 为一个（带等词的）一阶语言，L 中 A_1^2 解释为“=”

(E7) $A_1^2(x_1, x_1)$

(E8) $A_1^2(t_k, u) \to A_1^2(f_i^n(t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_n), f_i^n(t_1, \cdots, u, \cdots, t_n))$,$t_1, \cdots, t_n, u$ 是（L 的）任意项，f_i^n 是任意函项符

(E9) $(A_1^2(t_k, u) \to (A_i^n(t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_n) \to A_i^n(t_1, \cdots, u, \cdots, t_n)))$,$t_1, \cdots, t_n, u$ 是任意项，A_i^n 是任意谓词符

定义 5.5. 数学系统都是 K_L（对某个 L ）的扩充，它们包括公理 (E7)，以及 (E8)(E9) 的所有适用的（与 L 有关的）实例。

定义 5.6. (E7)(E8)(E9) 称为等词公理，任意包括 (E7)(E8)(E9) 适当实例的 K_L 的扩充称为带等词的一阶系统（first-order systems with equality），亦即一个一阶理论

命题 5.7. 设 S 是带等词的一阶系统，则下列各式是 S 的定理

(1) $\forall x_1 A_1^2(x_1, x_1)$

(2) $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1))$

(3) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_1^2(x_1, x_2 \to (A_1^2(x_1, x_3) \to A_1^2(x_2, x_3))))$

命题 5.8. 若 S 是一致的带等词的一阶系统，则 S 有一个模型，其对 A_1^2 的解释是 $=$

定义 5.9. 令 S 是带等词的一阶系统，S 的规范模型（normal model）是 A_1^2 解释为 = 的模型，亦简称模型

命题 5.10. *任何一致的带等词的一阶系统 S（带等词一阶逻辑 $K_{L=}$）都有有穷或可数无穷规范模型*

命题 5.11. *任何带等词的一阶系统 S，若 S 有一个无穷规范模型，则它有一个可数无穷规范模型*

命题 5.12. *带等词的一阶系统 S 具有一致性*

定义 5.13 (存在唯一量词)**.**

- 存在量词
- 存在唯一量词
$$(\exists_1 x_i)\mathscr{A}(x_i) =_{def} (\exists x_i)(\mathscr{A}(x_i) \wedge (\forall x_j)(\mathscr{A}(x_j) \to x_i = x_j))$$
  亦如
$$(\exists! x_i)\mathscr{A}(x_i) =_{def} (\exists x_j)(\forall x_i)(\mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow x_i = x_j)$$
  其中 x_j 是不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现且不同于 x_i 的（第一个）变元
- 至多存在一个量词（但不一定存在）
$$(\exists!! x_i)\mathscr{A}(x_i) =_{def} (\forall x_i)(\forall x_j)(\mathscr{A}(x_i) \wedge \mathscr{A}(x_j) \to x_i = x_j)$$

5.3 群论

定义 5.14. 令 L_G 是具有下述字符表的一阶语言

- 变元 $x_1, \cdots$
- 个体常元 a_1（单位元）
- 函项符 f_1^1, f_1^2（逆，积）
- 谓词符 =
- 技术性符号 ”(”, ”)”, ”, ”
- 逻辑符 $\forall, \sim, \to$

定义 5.15 (群系统 $\mathscr{G}$)**.** $\mathscr{G}$ 为 $K_{L_\mathscr{G}}$ 的扩充，其合适公理包含 (E7)(E8)(E9) 的所有适当实例，并增加以下公理

$(G1) f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3) = f_1^2(x_1, f_1^2(x_2, x_3))$ （结合律）
$(G2) f_1^2(a_1, x_1) = x_1$ （左单位元）
$(G3) f_1^2(f_1^1(x_1), x_1) = a_1$ （左逆元）
这些公理中的变元可考虑等价的全称闭式。

注 5.16. $(G4) f_1^2(x_1, x_2) = f_1^2(x_2, x_1)$ *（交换律），增加 (G4) 即 Abel 群*

命题 5.17. *任意群 G 是群系统 $\mathscr{G}$ 的一个规范模型，群系统 $\mathscr{G}$ 的任一规范模型是一个群 G*

作业 11

1. 令 S 是一个带等词的一阶系统，设闭式 $\mathscr{A}$ 在 S 的所有规范模型中为真，证明 $\mathscr{A}$ 在 S 的所有模型中为真。
2. 在带等词的一阶系统中定义量词 “存在仅两个”。
3. 描述一个关于域论的一阶系统，包括其一阶语言和公理（模式）集。
4. 在带等词的一阶系统中，证明

(a) $\vdash (\forall x)(\mathscr{A}(x) \leftrightarrow (\exists y)(x = y \wedge \mathscr{A}(y)))$，y 不出现在 $\mathscr{A}(x)$ 中

(b) $\vdash (\forall x)(\exists y)x = y$

5. [附加题]

- 完全归纳：$\vdash_{\mathscr{N}} (\forall x)((\forall z)(z < x \to \mathscr{A}(z)) \to \mathscr{A}(x)) \to (\forall x)\mathscr{A}(x)$
- 最小数归纳：$\vdash_{\mathscr{N}} (\exists x)\mathscr{A}(x) \to (\exists y)\mathscr{A}(y) \wedge (\forall z)(z < y \to \sim \mathscr{A}(z))$

5.4 一阶算数

定义 5.18. 令 L_N 是一个关于算术（N）的一阶语言，除变元、连接词、量词和技术性符号外，包括如下非逻辑符号

- 常元：a_1（代表 0）
- 函项符：f_1^1, f_1^2, f_2^2（后继、和与积）
- 谓词符：$=$

定义 5.19. $\mathscr{N}$ 表示（一阶）算术系统（或称 Peano 算术 (PA)），它是增加了以下附加公理而得到的 K_{L_N} 的扩充（一阶理论）

- (E7)，(E8) 和 (E9) 的合适实例下列六个公理及一个公理模式.
- 下列六个公理及一个公理模式

  $(N1)$ $(\forall x_1) \sim (f_1^1(x_1) = a_1)$

  $(N2)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(f_1^1(x_1) = f_1^1(x_2) \to x_1 = x_2)$

  $(N3)$ $(\forall x_1)(f_1^2(x_1, a_1) = x_1)$

  $(N4)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(f_1^2(x_1, f_1^1(x_2)) = f_1^1(f_1^2(x_1, x_2)))$

  $(N5)$ $(\forall x_1)(f_2^2(x_1, a_1) = a_1)$

  $(N6)$ $(\forall x_1)(\forall x_2)(f_2^2(x_1, f_1^1(x_2)) = f_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_1))$

  $(N7)$ $\mathscr{A}(a_1) \to ((\forall x_1)(\mathscr{A}(x_1) \to \mathscr{A}(f_1^1(x_1))) \to (\forall x_1)\mathscr{A}(x_1))$

  对（L_N 的）每个公式 $\mathscr{A}(x_1)$，x_1 在其中自由出现。

注 5.20. *在 L_N 中，定义符号 $+$，$\times$ 和 $'$（后继）分别代替 f_1^2, f_2^2 和 f_1^1，即约定 $t_1 + t_2$ 代表 $f_1^2(t_1, t_2)$，$t_1 \times t_2$ 代表 $f_2^2(t_1, t_2)$，t' 代表 $f_1^1(t)$，0 代表 a_1，$f_1^1(x_1) \neq a_1$ 代表 $\sim (f_1^1(x_1) = a_1)$*

注 5.21 (Peano 公设).

(1) 0 是自然数

(2) 对每一自然数 n，存在另一自然数 n'

(3) 没有自然数 n，使得 n' 等于 *0*
(4) 对任意自然数 m 和 n，若 m' $=$ n'，则 $m = n$
(5) 对任意包含 *0* 的自然数集 A，若当 $n \in A$ 时，$n' \in A$，则 A 包含每一个自然数

注 5.22. $0^{(n)}$ 是 *0* 后面 n 个 ' 的缩写，数 $n \in D_N$ 是项 $0^{(n)}$ 在 N 中的解释 $0^{(0)}$ 代表 $\mathscr{N}$ 的常项 *0*

命题 5.23. 任何 $\mathscr{N}$ 的模型都是无穷的

定义 5.24. 一个解释 $\mathfrak{N}$，其中

- 论域是正整数
- 0 作为符号 0 的解释
- 后继操作（+1）是函数'（即 f_1^1）的解释
- 朴素算术的加和乘是 $+$ 和 $\times$ 的解释
- 相等关系是 $=$ 的解释

是 $\mathscr{N}$ 的（规范）模型，称为标准模型

注 5.25. 算术系统 N 是不完全的（*Gödel* 不完全性定理）

5.5 形式集论

注 5.26. 朴素集论（*naive set theory*）
一个集（合）是具有一定性质的对象的全体（相当于没定义的直观概念）
$S = \{x|A(x)\}$
隶属关系：$x \in S$
子集关系：若 $\forall x, x \in S \Rightarrow x \in S'$，则 S 包含于 S'，即 $S \subset S'$，S 是 S' 的子集
集中成员（元素）可以是集

定义 5.27 (ZF 的一阶语言)**.** L_{ZF}：变元、连接词、量词和技术性符号外
谓词符：$=$（A_1^2），A_2^2
没有函项符和常元
A_2^2 解释为隶属关系 $\in$，记 $t_1 \in t_2$ 表示 $A_2^2(t_1, t_2)$，$t_1 \notin t_2$ 表示 $\sim A_2^2(t_1, t_2)$
$\vdash_{ZF}$ 是 L_{ZF} 上的推理关系

定义 5.28. ZF 作为 K_L 的扩充（带等词的一阶理论）
(E7),(E9) 的所有合适的实例（(E8) 没有非平凡实例）
下述的公理 (ZF1) 到 (ZF8)
(ZF1) $(x_1 = x_2 \leftrightarrow (\forall x_3)(x_3 \in x_1 \leftrightarrow x_3 \in x_2))$（外延公理）
(ZF2) $(\exists x_1)(\forall x_2) \sim (x_2 \in x_1)$（空集公理）
(ZF3) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)(x_4 \in x_3 \leftrightarrow (x_4 = x_1 \vee x_4 = x_2))$（对集公理）
(ZF4) $(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(x_3 \in x_2 \leftrightarrow (\exists x_4)(x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4))$（并集公理）
(ZF5) $(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(x_3 \in x_2 \leftrightarrow x_3 \subset x_1)$（幂集公理）
(ZF6) $(\forall x_1)(\exists_1 x_2)\mathscr{A}(x_1, x_2) \to (\forall x_3)(\exists x_4)(\forall x_5)(x_5 \in x_4 \leftrightarrow (\exists x_6)(x_6 \in x_3 \wedge \mathscr{A}(x_6, x_5)))$（替换公理），对每个公式 $\mathscr{A}(x_1, x_2), x_1, x_2$ 在其中自由出现（不失一般性，假定量词 $(\forall x_5)$ 和 $(\forall x_6)$ 不在其中出现）
(ZF7) $(\exists x_1)(\varnothing \in x_1 \wedge (\forall x_2)(x_2 \in x_1 \to x_2 \cup \{x_2\} \in x_1))$（无穷公理）
(ZF8) $(\forall x_1)(\sim x_1 = \varnothing \to (\exists x_2)(x_2 \in x_1 \wedge \sim (\exists x_3)(x_3 \in x_2 \wedge x_3 \in x_1)))$（基础公理）

注 5.29. *ZF8 意为每一非空集 x 包含一个与 x 不相交的元素*

定义 5.30 (选择公理（AC）)**.** 对任一由互不相交的非空集组成的集 x，存在至少一个集 y，它与 x 的每一元素（非空集）恰好有一个公共元素

有以下两个等价陈述

定义 5.31 (佐恩引理)**.** 若一个偏序集的每条链存在一个上确界，则该偏序集存在一个极大元

定义 5.32 (良序原理)**.** 每个集都是良序的（所有非空子集在全序关系下都存在最小元素）

注 5.33.

- *(AC) 独立于 ZF*
- *选择公理被普遍使用，但有争议，如用选择公理可构造不可测集，但测度论需要（Lebesgue）可测集*
- *Banach-Tarski 悖论（分球问题）：把一个单位球体分成有限个点集（最少可分成五份），通过一些刚体运动（旋转和平移）再重新组合后可成为两个单位球体——存在不可测集的结果*

定义 5.34. 公理化集论 ZFC = ZF + (AC)

注 5.35.

- *若 ZF 是一致的，则 ZFC 也是一致的*
- *(AC) 不会产生悖论，但可能导致反直觉的结果（如 Banach-Tarski 悖论）*

注 5.36.

- *基于形式集论，集不会导致 Russell 悖论，作为数学中集的概念。*
- *数学中（如布尔巴基学派），认为集作为数学基础是没危机的，一旦发现悖论总能通过引入新的公理加以限制或消除。*
- *朴素集改称为类（class），这样，类包含集；把不能作为（ZFC）集的类称为真（proper）类，这样，全体集是一个真类（类似地，全体代数结构（群）/空间（拓扑）是真类）（这种大对象通过范畴论处理）*
- *NGB 系统（von Neumann–Bernays–Gödel）通过排除真类的公理定义集，从而避免 Russell 悖论*
- *计算机科学中，如程序语言，用类的概念（不需 ZFC 作为基础），通常不是真类，并引入过程机制（如 Python 类中方法），但有时需要处理真类的悖论问题（如 OWL (Web Ontology Lanuguage)），并与（数据）类型相关*

悖论 5.37 (Hilbert 悖论)**.** *假设有一个拥有可数无穷多个房间的旅馆，且所有的房间均已客满。设想此时这一旅馆将可再接纳新的客人*

一个新客人：由于旅馆拥有无穷个房间，因而可将在 1 号房间原有的客人安置到 2 号房间、2 号房间原有的客人安置到 3 号房间，以此类推，这样就空出了 1 号房间留给新的客人

类推之

有穷个新客人

无穷个新客人

无穷个客车且每个客车有无穷客人

注 5.38. 自然，*Hilbert* 悖论并不是悖论，只是无穷对比现实形成的反直觉结果 ◡̈，当然，*Hilbert* 提出这个悖论是为了否定实无穷的存在。

哲学家 *William Lane Craig* 据此证明上帝的存在："尽管在数学上这种旅馆（或任何无穷的事物）并非是不可能的，但从直觉上这样的事物永远不可能存在，不仅如此，任何实无穷都不可能存在。如果一个时间序列能够无穷地回退到过去那就会建立起一个实无穷，既然实无穷不存在，那时间就必然有个"起点"。每个事物都有其发生的原因，而时间起始的原因不可能是其他事物，只能是上帝。

注 5.39 (连续统假设)**.** *(CH)* 每个实数的无穷集或是可数的，或与全部实数有相同的基数

注 5.40. 基数的知识请参考实变教材或者介绍集合论的书。

注 5.41 (广义连续统假设)**.** *(GCH)* 对所有无穷基数 $\aleph$，都不存在介乎 $\aleph$ 与 $2^{\aleph}$ 之间的基数

注 5.42 (结果)**.** 一致性（*Gödel 1938*，内模型法）：*(AC)* 和 *(CH)* 都与 *ZF* 一致，独立性（*Cohen 1963*，力迫法）：*(AC)* 和 *(CH)* 都与 *ZF* 独立，即 *ZFC* 公理系统内无法判断连续统假设对错。

5.6 一致性问题

悖论 5.43 (Skolem 悖论)**.** 按 *Löwenheim-Skolem* 定理，*ZF* 具有可数模型，而不可数集存在，*ZF* 似应有不可数模型。

命题 5.44. 令 S 是一个一阶系统，S^* 是 S 的扩充，若 S^* 是一致的，则 S 也是一致的。

证明. 设 S* 是一致的，但 S 是不一致的

对 S 的某个公式 $\mathscr{A}$，$\vdash_S \mathscr{A}$ 且 $\vdash_S \sim \mathscr{A}$

$\mathscr{A}$ 也是 S* 的公式，且 S 中证明也是 S* 的证明

$\vdash_{S^*} \mathscr{A}$ 且 $\vdash_{S^*} \sim \mathscr{A}$

这与 S* 的一致性矛盾。 □

推论 5.45. 由 *ZF* 的一致性可推出 $\mathscr{N}$ 的一致性

注 5.46 (数学基础问题：绝对一致性)**.** 一阶逻辑具有绝对一致性，作为一阶系统是否有某个数学系统（如最基本的 *ZF*）具有一致性？

注 5.47. *Euclid* 几何（经 *Hilbert* 改正）被认为有"几乎接近"完全性（因此有"几乎接近"一致性）

注 5.48. 尚未知 *ZF* 是否具有一致性

6 不完全性定理

6.1 Gödel 证明

定义 6.1.

- 完全性：$\forall \mathscr{A}, \models \mathscr{A} \Rightarrow \vdash \mathscr{A}$
- 不完全性：$\exists \mathscr{A}, \models \mathscr{A} \not\Rightarrow \vdash \mathscr{A}$

悖论 6.2. 自然语言（汉语或法语等）的一些语句可以表示实数，如"一个圆的圆周与直径之比"就表示实数 π

把这些语句以汉语拼音（或笔划）按拼音字母（或笔划数）顺序排列，如按照语句中字母（或笔划数）的多少排列，少的在前，多的在后，相同的按字母（或笔划）先后顺序，这样就把能用语句表示的实数排成一个序列 $r_1, r_2, \cdots, r_n, r_{n+1}, \cdots$

可得所有能用有穷多字（字母）定义的实数，它们构成一个可数集 E 现用下面一个规则把这个序列改变一下生成一个实数（*Cantor* 对角法）

"设 E 中第 n 个数的第 n 位为 p，生成一个实数如下：其整数部分为 *0*，若 p 是 *8* 或 *9*，则其第 n 位小数变成 *1*，若 p 不是 *8* 或 *9*，则其第 n 位小数为 $p+1$"

这个实数显然不属于 E，因它与 E 中每个数都不同；但这个数却可由上述有穷多个字组成的语句来定义，故应属于 E

矛盾

定义 6.3 (算术编码)**.** 任一种（自然）语言用来表达整数（算术），总是有些涉及算术性质的词汇是无法明确定义的（"一个整数为另两个整数之和"），这些词汇作为原始词汇（相当于公理），用有穷个字（母）的一些语句可定义整数，每个定义对应唯一的整数，把具有最少字（母）数的定义对应于 1，下一个定义对应于 2，依次类推，获得一个（自然数）序列

定义 6.4 (Richard 性质)**.** 每个定义都与唯一的整数相联系，整数作为定义表达句的编码，这个整数本身（不）具有与它对应的定义所指定的性质

例："不能被 1 和其自身以外的其它整数整除"——恰好对应于顺序号 17（17 个汉字），17 本身就具有表达句所定义的性质（自谓）

"某一个整数与这一整数自身的乘积"——对应于顺序号 15，15 本身不具有表达句所定义的性质（非自谓）

称这种不具有与它对应的定义所指定的性质为 Richard-性质

定义 6.5. x 是 Richard-数：x 本身不具有与它在序列中对应的定义表达句所指定的性质

悖论 6.6. *具有 Richard-性质（这个定义表达句）$\Rightarrow$ 用文字描述了整数的（这个）算术性质 $\Rightarrow$ 对应于序列中一个固定的位置（数），设此（位置）数为 n*

n 是 Richard-数 $\Leftrightarrow$ n 不具有与 n 对应的定义表达句所指定的性质（非 Richard-性质）$\Leftrightarrow$ n 没有作为 Richard-数之性质 $\Leftrightarrow$ n 不是 Richard-数

注 6.7. *Gödel 证明受到该悖论启发*

6.2 可表达性

定义 6.8. $L_{\mathscr{N}}$ 是一阶（算术）语言，$\mathscr{N}$ 是一阶算术，N 是（算术）模型（如朴素算术），其论域 D_N 是自然数

命题 6.9. *令 $m, n \in D_N$*

(i) 若 $m \neq n$，则 $\vdash_N \sim (0^{(m)} = 0^{(n)})$

(ii) 若 $m = n$，则 $\vdash_N (0^{(m)} = 0^{(n)})$

定义 6.10 (可表达性)**.** 一个自然数上的 k 元关系 R 在 N 中是可表达的（expressible），若存在具有 k 个自由变元的公式 $\mathscr{A}(x_1, \cdots, x_n)$，使对任意 $n_1, \cdots, n_k$，有

(i) 若 $R(n_1, \cdots, n_k)$ 在 N 中成立，则 $\vdash \mathscr{N} \mathscr{A}(0^{(n_1)}, \cdots, 0^{(n_k)})$

(ii) 若 $R(n_1, \cdots, n_k)$ 在 N 中不成立，则 $\vdash_{\mathscr{N}} \sim \mathscr{A}(0^{(n_1)}, \cdots, 0^{(n_k)})$

定义 6.11. D_N 上的 k 元函数（即 $D_N^k \to D_N$ 的函数）在 $\mathscr{N}$ 中是可表示的 (representable) 若它（作为 k+1 元关系）可被有 k+1 个自由变元的公式 $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{N}$ 中表达，使对任意 $n_1, \cdots, n_k$，有 $\vdash_{\mathscr{N}} (\exists_1 x_{k+1})\mathscr{A}(0^{(n_1)}, \cdots, 0^{(n_k)}, x_{k+1})$

注 6.12. *设 R 是 D_N 上的 k 元关系，R 的特征函数，记为 C_R，定义如下*

- $C_R(n_1, \cdots, n_k) = 0$，*若* $R(n_1, \cdots, n_k)$ *成立*
- $C_R(n_1, \cdots, n_k) = 1$，*若* $R(n_1, \cdots, n_k)$ *不成立*

命题 6.13. *令 S（如 $\mathscr{N}$）是 L_N 上一个带等词的一阶理论且 $\vdash_S 0 \neq 0^{(1)}$，则一个关系 R 是可表达的，当且仅当 C_R 是可表示的*

证明. 若 R 是可由 $\mathscr{B}(x_1, \cdots, x_n)$ 表达，易证 C_R 可由

$$(\mathscr{B}(x_1, \cdots, x_n) \wedge y = 0) \vee (\sim \mathscr{B}(x_1, \cdots, x_n) \wedge y = 0^{(1)})$$

表示

反之，若 C_R 可由 $\mathscr{B}(x_1, \cdots, x_n, y)$ 表示，用假设 $\vdash_S 0 \neq 0^{(1)}$，易证 R 可由 $\mathscr{B}(x_1, \cdots, x_n, 0)$ 表达。 □

推论 6.14. *并非 D_N 上的所有函数在 $\mathscr{N}$ 中都是可表示的*

命题 6.15. *D_N 上函数（关系）在 $\mathscr{N}$ 中是可表示（达）的，当且仅当它是递归的*

6.3 递归论

定义 6.16. 递归函数类是用以下方式定义的（不依赖于系统 $\mathscr{N}$）

某些容易定义的函数是递归的，从这些（基本）函数出发应用三条规则而得的所有函数也是递归的

1. 零函数 $z : D_N \to D_N$，对每一 $n \in D_N$，由 $z(n) = 0$ 给出
2. 后继函数 $s : D_N \to D_N$，对每一 $n \in D_N$，由 $s(n) = n + 1$ 给出
3. 投影函数 $p_i^k : D_N^k \to D_N$，对每一 $n_1, \cdots, n_k \in D_N$，由 $p_i^k(n_1, \cdots, n_k) = n_i$ 给出，p_1^1 是恒等函数

定义规则：

I. 合成若 $g : D_N^j \to D_N$，且对 $1 \leq i \leq j$，$h_i : D_N^k \to D_N$，则由 $f(n_1, \cdots, n_k) = g(h_1(n_1, \cdots, n_k), \cdots, h_j(n_1, \cdots, n$
所定义的 $f : D_N^k \to D_N$ 是从 g 和 $h_1, \cdots, h_j$ 合成的函数

II. 递归若 $g : D_N^k \to D_N$ 和 $h : D_N^{k+2} \to D_N$，则由 $f(n_1, \cdots, n_k, 0) = g(n_1, \cdots, n_k)$ 和 $f(n_1, \cdots, n_k, n+1) = h(n_1, \cdots, n_k, n, f(n_1, \cdots, n_k, n))$ 定义的 $f : D_N^{k+1} \to D_N$ 是从 g 和 h 由递归得到的函数

III. 最小数算子令 $g : D_N^{k+1} \to D_N$ 是任意函数，它具有这样的性质，对每一 $n_1, \cdots, n_k \in D_N$，至少存在一个 $n \in D_N$，使得 $g(n_1, \cdots, n_k, n) = 0$。由 $f(n_1, \cdots, n_k) = \min\{n \in D_N | g(n_1, \cdots, n_k, n) = 0\}$ 定义的 $f : D_N^k \to D_N$ 是从 g 由最小数算子得到的函数。

定义 6.17. 使 $g(n_1, \cdots, n_k, n) = 0$ 的最小数 n 用 $\mu n[g(n_1, \cdots, n_k, n) = 0]$ 表示

定义 6.18. 一个 D_N 上的函数是递归的，若它由上述 1,2,3 型函数经有穷次使用规则 I,II,III 获得。

递归函数类是 D_N 上包含所有的 1,2,3 型函数，以及对使用规则 I,II,III 封闭的最小函数类。

一个函数是原始递归的（primitive recursive），若它由 1,2,3 型函数经有穷次使用规则 I,II 获得。

原始递归函数类是一个比递归函数类更小的类。

定义 6.19. D_N 上的关系是递归的，若它的特征函数是递归函数

命题 6.20. *若 R 和 S 是递归的 k 元关系，则关系 $\bar{R}$，$R \wedge S$，$R \vee S$ 都是递归的*

命题 6.21. *D_N 的每一单元素子集是递归的*

6.4 Gödel 数

定义 6.22. Gödel 对一阶语言 L 给出一种编码，配给 L 中每一符号、项、公式和公式序列一个数，使得根据任意给定的数，能（机械能行）找出 L 中所对应的表达式。

定义 6.23. 在 LN 的符号集上定义

$g(() = 3; g()) = 5; g(,) = 7; g(\sim) = 9; g(\to) = 11; g(\forall) = 13; g(x_k) = 7 + 8k; k = 1, 2, \cdots; g(a_k) = 9 + 8k; k = 1, 2, \cdots; g(f_k^n) = 11 + 8\times(2^n \times 3^k) n = 1, 2, \cdots; k = 1, 2, \cdots; g(A_k^n) = 13 + 8\times(2^n \times 3^k) n = 1, 2, \cdots; k = 1, 2, \cdots;$

每个符号都被指派为一个不同的奇正整数，这样，对任意给定的奇正整数（若它对应某个符号）都能找出它对应的符号

定义 6.24. 若 $u_0, \cdots, u_k$ 是 L_N 的符号，用 $u_0 u_1 \cdots u_k$ 表示串（可能是也可能不是 L_N 的项或公式），定义 $g(u_0 u_1 \cdots u_k) = 2^{g(u_0)} 3^{g(u1)} \cdots p_k^{g(u_k)}$

这里，对每一 i > 0,p_i 表示第 i 个奇素数，且 $p_0 = 2$

定义 6.25. 令 $s_0, s_1, \cdots, s_r$ 都是 L_N 的串，定义 $g(s_0, s_1, \cdots, s_r) = 2^{g(s_0)} 3^{g(s_1)} \cdots p_r^{g(s_r)}$

定义 6.26 (Gödel 数)**.**

- g 在 D_N 中取值
- g 是单射的，但不是满射的
- g 是以这样的方式定义的：对 g 的值域中的任意数，存在一个能行的方法计算 g^{-1}（即用素数幂之积的表达式）

g 的值称为 Gödel 数

定义 6.27. 基于 Gödel 数，定义 D_N 上一个关系 Pf，Pf(m, n) 成立 ⇔ m 是 $\mathscr{N}$ 的公式序列的 Gödel 数，这个序列是 Gödel 数为 n 的公式在 $\mathscr{N}$ 中的一个证明

命题 6.28. *若关系 Pf 在 $\mathscr{N}$ 中是可表达的，则存在 L_N 的公式 $P(x_1, x_2)$，使对每个 $m, n \in D_N$ 有*

若 Pf(m, n) 成立，则 $\vdash_{\mathscr{N}} P(0^{(m)}, 0^{(n)})$

若 Pf(m, n) 不成立，则 $\vdash_{\mathscr{N}} \sim P(0^{(m)}, 0^{(n)})$

命题 6.29. *D_N 的下列关系是递归的，因此在 $\mathscr{N}$ 中是可表达的*

(i) Wf $\quad Wf(n)$ 成立 $\leftrightarrow$ n 是 $\mathscr{N}$ 中一个公式的 Gödel 数

(ii) Lax $\quad Lax(n)$ 成立 $\Leftrightarrow$ n 是 $\mathscr{N}$ 中一个逻辑公理的 Gödel 数

(iii) $Prax$ $\quad Prax(n)$ 成立 $\Leftrightarrow$ 是 $\mathscr{N}$ 中一个非逻辑公理的 Gödel 数

(iv) Prf $\quad Prf(n)$ 成立 $\Leftrightarrow$ n 是 $\mathscr{N}$ 中一个证明的 Gödel 数

(v) Pf $Pf(m, n)$ 成立 $\Leftrightarrow$ m 是以 n 为 Gödel 数的公式的一个证明的 Gödel 数

(vi) $Subst$ $\quad Subst(m, n, p, q)$ 成立 $\Leftrightarrow$ m 是在其 Gödel 数为 n 的表达式中，对所有其 Gödel 数为 q 的自由变元替换为其 Gödel 数为 p 的项所得的结果的 Gödel 数

(vii) W $W(m,n)$ 成立 $\Leftrightarrow$ m 是公式 $\mathscr{A}(x_1)$ 的 *Gödel* 数，其中 x_1 在 $\mathscr{A}(x_1)$ 中自由出现，而 n 是 $\mathscr{A}(0^{(m)})$ 在 $\mathscr{N}$ 中证明的 *Gödel* 数

(viii) D $D(m,n)$ 成立 $\Leftrightarrow$ m 是公式 $\mathscr{A}(x_1)$ 的 *Gödel* 数，其中 x_1 在 $\mathscr{A}(x_1)$ 中自由出现，而 n 是公式 $A(0^{(m)})$ 的 *Gödel* 数

6.5 不完全性定理证明

证明中的一个关键技巧是使用关系 W，W 是可表达的，故存在一个公式 $\mathscr{W}(x_1,x_2)$，(其中 x_1,x_2 是自由的)，使得

若 $\mathscr{W}(m,n)$ 成立，则 $\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{W}(0^{(m)},0^{(n)})$ （可证）

若 $\mathscr{W}(m,n)$ 不成立，则 $\vdash_{\mathscr{N}}\sim \mathscr{W}(0^{(m)},0^{(n)})$ （不可证）

W 是 $\mathscr{W}$ 的解释

定义 6.30. 考虑公式（$\mathscr{A}(x_1)$）$(\forall x_2)\sim \mathscr{W}(x_1,x_2)$

令 p 为该公式的 Gödel 数，以 $0^{(p)}$ 替换 x_1 所得公式 $(\forall x_2)\sim \mathscr{W}(0^{(p)},x_2)$，记为 $\mathscr{U}$

W 是 $\mathscr{W}$ 解释，对 $\mathscr{U}$ 解释如下: “对任意 $n\in D_N$ $\mathscr{W}(p,n)$ 不成立”，亦即，对任意 $n\in D_N$，p 是其中 x_1 自由出现的公式 $\mathscr{A}(x_1)$ 的 Gödel 数且 n 是 $\mathscr{A}(0^{(p)})$ 在 $\mathscr{N}$ 中的证明的 Gödel 数是不成立的

这样，p 是一个其中 x_1 自由出现的公式的 Gödel 数，该公式即 $(\forall x_2)\sim \mathscr{W}(x_1,x_2)$，记为 $\mathscr{A}(x_1)$，则 $\mathscr{A}(0^{(p)})$ 就是 $\mathscr{U}$

$\mathscr{U}$ 的解释等价于，对任意 $n\in D_N$，n 不是 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{N}$ 中的证明的 Gödel 数，亦即公式 $\mathscr{U}$ 断言其自身的不可证性

定义 6.31. 令 S 是一个与 $\mathscr{N}$ 有相同语言的一阶系统，S 是 ω-一致的，若不存在 x_1 在其中自由出现的公式 $\mathscr{A}(x_1)$，使得对任意 $n\in D_N$，$\mathscr{A}(0^{(n)})$ 是 $\mathscr{N}$ 的定理，且 $\sim(\forall x_1)\mathscr{A}(x_1)$ 也是 $\mathscr{N}$ 的定理

命题 6.32. *设 S 是与 N 有相同语言的一阶系统，若 S 是 ω-一致的，则 S 是一致的*

证明. 令 $\mathscr{A}(x_1)$ 是任一公式使得对每个 n，$\mathscr{A}(0^{(n)})$ 是 S 的定理，如 $\mathscr{A}(x_1)$ 可为 $x_1=x_1$，由 ω-一致性，$\sim\forall x_1\mathscr{A}(x_1)$ 不是 S 的定理，即存在一个公式不是定理，故 S 是一致的 □

命题 6.33 (不完全性定理)**.** *在 $\mathscr{N}$ 具有 ω-一致性条件下，$\mathscr{U}$ 和它的否定都不是 $\mathscr{N}$ 的定理，亦即，若 $\mathscr{N}$ 是 ω-一致的，则 $\mathscr{N}$ 是不完全的。*

证明. 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{N}$ 的定理，令 q 是 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{N}$ 中证明的 Gödel 数，用 p 如上述（$\mathscr{A}(x_1)$，即 $(\forall x_2)\sim \mathscr{W}(x_1,x_2)$ 的 Gödel 数）

$\mathscr{W}(p,q)$ 成立

W 由 $\mathscr{W}$ 在 $\mathscr{N}$ 中可表达，$\vdash_{\mathscr{N}} \mathscr{W}(0^{(p)},0^{(q)})$

但由 $\vdash_{\mathscr{N}}\mathscr{U}$，有 $\vdash_{\mathscr{N}}\forall x_2\sim \mathscr{W}(0^{(p)},x_2)$，$\vdash_{\mathscr{N}}\sim \mathscr{W}(0^{(p)},0^{(q)})$ （(K5)，MP）与 N 的一致性矛盾，故 $\mathscr{U}$ 不是 $\mathscr{N}$ 的定理

由 $\mathscr{U}$ 不是 $\mathscr{N}$ 的定理

不存在 $\mathscr{N}$ 中 $\mathscr{U}$ 的证明，不存在 q 是在 $\mathscr{N}$ 中 $\mathscr{U}$ 的证明的 Gödel 数，不存在 q 是 $(\forall x_2)\sim \mathscr{W}(0^{(p)},x_2)$ 的证明的 Gödel 数

对任意 q，$\mathscr{W}(p,q)$ 不成立

$\vdash_{\mathscr{N}}\sim \mathscr{W}(0^{(p)},0^{(q)})$ （任一 q）

由 ω-一致性，$\forall x_2\sim \mathscr{W}(0^{(p)},x_2)$ 不是 $\mathscr{N}$ 的定理，即 $\sim\mathscr{U}$ 不是 $\mathscr{N}$ 的定理 □

命题 6.34. *设 $\mathscr{N}$ 是 ω-一致的，则 $\mathscr{N}$ 包含一个闭式，它在模型 $\mathscr{N}$ 中是真的，但它不是 $\mathscr{N}$ 的定理*

命题 6.35. 设 $\mathscr{N}$ 是一致的，$\mathscr{N}$ 包含一个闭式，它在模型 $\mathscr{N}$ 中是真的，但它不是 $\mathscr{N}$ 的定理

命题 6.36. 设 S 是 $\mathscr{N}$ 的扩充，使得 S 的合适公理的 *Gödel* 数集是一个递归集，则如果 S 是一致的，那么 S 是不完全的

命题 6.37 (Gödel 第二不完全性定理)**.** 任意一个包含算术系统的形式系统自身不能证明它本身的一致性

证明. 用一个闭式表示“若没有同时对一个公式及其否定式的证明，则是一致的”

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4) \sim (Pf(x_1, x_3) \wedge Pf(x_2, x_4) \wedge Neg(x_3, x_4))$$

这个公式可隐含 Gödel 公式 $\mathscr{U}$，由不完全性定理，若该系统是一致的，则该公式（断言自身一致性）是不可证的 □

注 6.38 (不可证的算术真理)**.** 继承 n 进制把 m 的 n 进制所有的指数改写为 n 进制，以此类推（指数的指数），直到每个出现的数都比 n 小，例：$35 = 2^{2^2+1} + 2^1 + 2^0$

Goodstein 系列 $G(m)$（m 是一个自然数）第一个元素 $G(m)(1)$ 是 m 本身，第 $n+1$ 个元素 $G(m)(n+1)$ 构造如次：先把 $G(m)(n)$ 写成继承 $n+1$ 进制表示，再把其中所有的 $n+1$ 改为 $n+2$（换制，小于 $n+1$ 不改），然后再减 *1* 如 $G(m)(2)$：先把 m 写成继承 *2* 进制表示，再把其中所有的 *2* 改为 *3*，然后再减 *1*，如此直到结果为 *0*，此时该序列终止。

例：$G(3)$ 经 *6* 步终止于 *0*

Goodstein 定理（*1944*）：每个 *Goodstein* 系列都终止于 *0*

Kirby-Paris 定理（*1982*）：*Goodstein* 定理不是 *Peano* 算术的定理

证明需使用非标准算术模型（含非标准数 (超自然数) 的算术模型，*Skolem 1934*）

注 6.39. *Presburger* 算术的（带等词）一阶语言包含 *0*，*1* 和二元函数符 *+*（解释为加），公理如下

(1) $\sim (0 = x + 1)$

(2) $x + 1 = y + 1 \to x = y$

(3) $x + 0 = x$

(4) $x + (y + 1) = (x + y) + 1$

(5) $(P(0) \wedge \forall (P(x) P(x+1))) \to \forall y P(y)$ （公理模式，$P(x)$ 为含自由变元 x 的谓词符）

Presburger 算术是一致、完全和可判定的，且有证明器（*NP* 难解，*Davis, 1954/57*）

注 6.40 (Tarski 实闭域理论（1951）)**.** 实数上的域理论 *(R, 0, 1, +, ×)*，*R* 为实数集

实数比自然数要复杂，但实数的域理论是完全的，甚至是可判定的，其公理系统如下

(1) 所有关于域的公理

(2) 1 不是任意多个数的平方和

(3) 任意数和它的相反数之间至少有一个是平方数（即一个非 *0* 的数是正数或负数）

(4) 任意奇数次多项式必有根

注 6.41. *(1) Tarski* 实数不包含 *Peano* 算术，不能由 *1* 生成自然数序列，即自然数在实闭域中不可定义（可逐个数用一阶公式写出 $x = 1$，$x = 10$ 等，但不能用一个一阶公式来定义它们是自然数）

(2) 不存在实闭域公式 $\mathscr{A}(x)$，使得 $\mathscr{A}(a)$ 在实数中为真当且仅当 $\mathscr{A}(a)$ 是一个自然数

(3) 代数模型论中最重要的定理之一（若实闭域可定义集可完全分类，可建立模型论和代数几何的联系）

(4) 任意特征的代数闭域理论（*Tarski*），以特征不是 *0* 为例，公理系统如下：（*1*）所有关于域的公理，（*2*）多个 *1* 相加等于 *0*（若是 *0* 则换成“任意多个 *1* 相加不等于 *0*”），（*3*）任意多项式必有根

(5) 无端点稠密线序理论（有理数），其公理系统如下：（*1*）$<$ 是一个线序，（*2*）$<$ 没有端点（没有最大和最小元素），（*3*）对任意两个元素 a 与 b，必有一个 c 在 a 和 b 之间（稠密性）。其完全性定理易证。

注 6.42 (Euclid 几何)**.** *Euclid* 几何是公理系统和数学的起点，*Euclid* 几何五条公理接近一个完全的公理系统（“几乎完全”），但它还不是。*Hilbert* 给出了一个 *Euclid* 几何的公理系统，但不是一阶系统，*Tarski* 给出一个 *Euclid* 几何的一阶系统并证明了完全性，且基于实闭域理论是可判定的。

A 作业答案

A.1 作业 1

1. 把下列复合命题符号化：

(a) 若需求保持不变且价格增加，则营业额一定下降了。

(b) 如果琼斯没有被选为党的领袖，那么史密斯和罗宾逊中有一个将离开内阁，我们将在选举中失败。

(c) 若 y 是一个整数，则 z 不是实数，已知 x 是一个有理数。

解.

(a) 令 "$p=$ 需求保持不变"，"$q=$ 价格增加"，"$r=$ 营业额下降"，"$p\wedge q\to r$"．

(b) 令 "$p=$ 琼斯被选为党的领袖"，令 "$q_1=$ 史密斯离开内阁"，令 "$q_2=$ 罗宾逊离开内阁"，令 "$r=$ 我们在选举中失败"，"$\sim p\to(q_1\vee q_2)\wedge(q_1\vee q_2)\wedge r$"．

(c) 令 "$p=y$ 是一个整数"，"$q=z$ 是一个实数"，"$r=x$ 是一个有理数"，"$r\to(y\to\sim z)$"

□

2. 如果我们采用 "$A\vee B$" 表示 "A or B but not both"，则 "A or B or both" 如何表示？

解. "$(A\vee B)\vee(A\wedge B)$" □

3. 给出下列命题形式的真值表：

(a) $\sim(p\to q)\to\sim(q\to p)$

(b) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$

解.

$\sim$	$(p$	$\to$	$q)$	$\to$	$\sim$	$(q$	$\to$	$p)$
F	T	T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	F	T	F

$(p$	$\to$	$(q$	$\to$	$r))$	$\to$	$((p$	$\to$	$q)$	$\to$	$(p$	$\to$	$r))$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T	F	F	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	F	T	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

□

4. 证明命题形式 $((\sim p) \to (q \vee r))$ 与 $((\sim q) \to ((\sim r) \to p))$ 有相同的真值函数。

证明. 记 $\mathscr{A} = ((\sim p) \to (q \vee r)), \mathscr{B} = ((\sim q) \to ((\sim r) \to p))$。

$\mathscr{A}$ 取 F 值当且仅当 $\sim p$ 取 T 值，$q \vee r$ 取 F 值，即当且仅当 p,q 和 r 都取 F 值。

$\mathscr{B}$ 取 F 值当且仅当 $\sim q$ 取 T 值，$(\sim r) \to p$ 取 F 值，即当且仅当 q 取 F 值，$\sim r$ 取 T 值 p 取 F 值，即当且仅当 p,q 和 r 都取 F 值。

故 $((\sim p) \to (q \vee r))$ 与 $((\sim q) \to ((\sim r) \to p))$ 有相同的真值函数。 □

5. 下列命题形式中哪些是重言式?

(a) $((q \vee r) \to ((\sim r) \to q))$

(b) $((p \to (q \to r)) \to ((p \wedge (\sim q)) \vee r))$

解. (a) 是重言式

$((q$	$\vee$	r	$\to$	$((\sim$	$r)$	$\to$	$q))$
T	T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	F	T	F

(b) 不是重言式，当 p, q, r 取 FFF 时，$((p \to (q \to r)) \to ((p \wedge (\sim q)) \vee r))$ 真值为 F。 □

6. 证明下列命题形式对是逻辑等价的:

(a) $(p \to q), (\sim p \vee q)$

(b) $((p \vee q) \wedge r), ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

证明. (a) 对 $(p \to q), f(T,T) = T, f(T,F) = F, f(F,T) = T, f(F,F) = T$

对 $(\sim p \vee q), f(T,T) = T, f(T,F) = F, f(F,T) = T, f(F,F) = T$

故逻辑等价。

(b) 对 $((p \vee q) \wedge r), f(T,T,T) = T, f(T,T,F) = F, f(T,F,T) = T, f(T,F,F) = F, f(F,T,T) = T, f(F,T,F) = F, f(F,F,T) = F, f(F,F,F) = F$

对 $((p \wedge r) \vee (q \wedge r)), f(T,T,T) = T, f(T,T,F) = F, f(T,F,T) = T, f(T,F,F) = F, f(F,T,T) = T, f(F,T,F) = F, f(F,F,T) = F, f(F,F,F) = F$

故逻辑等价。 □

7. 证明命题形式 $(((\sim p) \to q) \to (p \to (\sim q)))$ 不是重言式。找出命题形式 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 使得 $(((\sim \mathscr{A}) \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\sim \mathscr{B})))$ 是一个矛盾式。

证明. 当 p, q 真值都为 T 时，$(((\sim p) \to q) \to (p \to (\sim q)))$ 真值为 F，故不是重言式。

当 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为重言式时，$(((\sim \mathscr{A}) \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\sim \mathscr{B})))$ 是一个矛盾式，故取 $\mathscr{A} = p \vee \sim p, \mathscr{B} = p \to p$ 即可。 □

8.

(a) 给出 Russell（集合）悖论，并论证之。

(b) “我明天这个时候说的这句话是假的”，这个句子是悖论吗?

证明. (a)Russell（集合）悖论:$X=\{Y|Y\notin Y\}$，问 $X\in X$，或是 $X\notin X$?

如果 $X\in X$，根据 X 的条件 $X\notin X$; 如果 $X\notin X$，根据集合的性质，$X\in X$，不论如何都是矛盾。

(b) 不是悖论，若这句话为真，则明天这个时候的这句话为假，则后天说的这句话为真，如此循环下去。 □

A.2 作业 2

1. 证明命题形式 $(\sim(p\vee\sim q))\to(q\to r)$ 与下列每个命题形式都是逻辑等价的:

 (a) $q\to(p\vee r)$

 (b) $(\sim(\sim q\vee r)\to(q\to p))$

证明. (a) $(\sim(p\vee\sim q))\to(q\to r)\equiv(\sim p\wedge q)\to(q\to r)\equiv(\sim p\wedge q\wedge q)\to r\equiv(\sim p\wedge q)\to r\equiv q\to(\sim p\to r)\equiv q\to(p\vee r)$

(b)$(\sim(\sim q\vee r)\to(q\to p))\equiv(q\wedge\sim r)\to(q\to p)\equiv(q\wedge\sim r\wedge q)\to p\equiv(q\wedge\sim r)\to p\equiv q\to(\sim r\to p)\equiv q\to(p\vee r)\equiv(\sim(p\vee\sim q))\to(q\to r)$ □

2. 给出与下列命题形式逻辑等价的合取范式和析取范式:

 (a) $p\leftrightarrow q$

 (b) $\sim((p\to\sim q)\to r)$

解. (a)$(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$

$(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p)$

(b)$(p\wedge\sim q\wedge\sim r)\vee(\sim p\wedge q\wedge\sim r)\vee(\sim p\wedge\sim q\wedge\sim r)$

$(\sim p\vee\sim q\vee\sim r)\wedge(\sim p\vee\sim q\vee r)\wedge(\sim p\vee q\vee\sim r)\wedge(p\vee\sim q\vee\sim r)\wedge(p\vee q\vee\sim r)$ □

3. (a) 给出与 $(\sim p\wedge\sim q)\to(\sim r\wedge s)$ 逻辑等价的只出现连接符 $\sim$ 和 $\vee$ 的命题形式;

 (b) 给出与 $(p\leftrightarrow(\sim q))\leftrightarrow r$ 逻辑等价的只出现连接符 $\sim$ 和 $\wedge$ 的命题形式;

 (c) 给出与 $((p\wedge q)\vee(r\wedge s))$ 逻辑等价的只出现连词 $\sim$ 和 $\to$ 的命题形式。

解. (a) $(\sim(p\vee q))\to(\sim(r\vee\sim s))$

(b) $(\sim((\sim(p\wedge q))\wedge(\sim(\sim p\wedge\sim q))\wedge\sim r))\wedge(\sim(r\wedge(\sim(\sim(p\wedge q))\wedge(\sim(\sim p\wedge\sim q)))))$

(c)$(p\to(\sim q))\to(\sim(r\to(\sim s)))$ □

4. 证明:$\{\sim,\leftrightarrow\}$ 不是连接符的完备集

证明. 假设 $p\to q$ 可以由 $\{\sim,\leftrightarrow\}$ 构成的命题形式 $\mathscr{C}$ 表示，对 $\mathscr{C}$，要么逻辑等价于 $\sim(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$，要么形式为 $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$，对于第一种，逻辑等价于 $(\sim\mathscr{A})\leftrightarrow\mathscr{B}$，故对 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 同样操作，一层一层下去，$\mathscr{C}$ 逻辑等价于一个 $\{\sim,\leftrightarrow\}$ 构成且 $\sim$ 只作用于命题变元的命题形式。又 $\leftrightarrow$ 满足结合律，从而 $\mathscr{C}$ 等价于 $p_1\leftrightarrow p_2\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow p_n$，其中 p_i 为文字。又 $\leftrightarrow$ 满足交换律，$\mathscr{C}$ 逻辑等价于 $\mathscr{X}\leftrightarrow\mathscr{Y}$，其中 $\mathscr{X}$ 只含有 $p,\sim p;\mathscr{Y}$ 只含有 $q,\sim q$. 当 q 取 T 时，无论 p 取什么，$p\to q$ 均为 T，这说明 $\mathscr{X}$ 为重言式或矛盾式，但是当 q 取 F 时，$\mathscr{X}$ 会随 p 的变化而变化，矛盾。 □

5. 对下列的每个命题，写出适当的推理形式并判断其是否有效:

 (a) 若函数 f 不是连续的，则函数 g 是不可微的; g 是可微的，故 f 是连续的

 (b) 若 U 是 V 的子空间，则 U 是 V 的子集，U 包含零向量且 U 是闭的; U 是 V 的子集，且若 U 是闭的，则 U 包含零向量。故若 U 是闭的，则 U 是 V 的子空间。

解. (a) 记 p 表示函数 f 是连续的，q 表示函数 g 是可微的，推理形式，$\sim p \to \sim q,\quad q \quad \therefore p$，有效

(b) 记 p 表示 U 是 V 的子空间，q 表示 U 是 V 的子集，r 表示 U 包含零向量，s 表示 U 是闭的，推理形式，$p \to q \wedge r \wedge s,\quad q \wedge s \to r,\quad s,\quad \therefore p$

令 s 取 T，p 取 F，q 取 F，r 取 F，三个条件均为 T，但是结论为 F，无效 □

6. 假设 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n;\quad \therefore \mathscr{A}$ 是一个有效的推理形式。证明:$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_{n-1};\quad \therefore (\mathscr{A}_n \to \mathscr{A})$ 是一个有效的推理形式。

证明. 推理形式 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n;\quad \therefore \mathscr{A}$ 是有效的，当且仅当 $\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}$ 是重言式，而 $\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n \to \mathscr{A} \equiv (\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_{n-1}) \to (\mathscr{A}_n \to \mathscr{A})$，所以 $(\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_{n-1}) \to (\mathscr{A}_n \to \mathscr{A})$ 是重言式，故 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_{n-1};\quad \therefore (\mathscr{A}_n \to \mathscr{A})$ 是一个有效的推理形式。 □

A.3　作业 3

1. 证明下列公式是定理:

(a) $(p_1 \to p_2) \to ((\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1))$

(b) $((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3))$

(c) $(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)$

证明. (a) 记 $\mathscr{A}$ 为 $p_1 \to p_2$，由于 $\varnothing \vdash_L (\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1)$，$\varnothing \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L (\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1)$，由演绎定理，$\vdash_L (p_1 \to p_2) \to ((\sim p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to p_1))$

(b) 令 $\mathscr{A}$ 为 $p_1 \to (p_2 \to p_3)$，$\mathscr{B}$ 为 $p_1 \to p_2$，$\mathscr{C}$ 为 $p_1 \to p_3$

$$
\begin{aligned}
&(1)\ (p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3)) \qquad (L2)\\
&(2)\ (\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C})) \qquad (L2)\\
&(3)\ (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \qquad (1)(2)(MP)
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
&(1)\ p_1 \to (p_1 \to p_2)\\
&(2)\ (p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to p_1) \to (p_1 \to p_2)) \qquad (L2)\\
&(3)\ (p_1 \to p_1) \to (p_1 \to p_2) \qquad (1)(2)(MP)\\
&(4)\ p_1 \to p_1\\
&(5)\ p_1 \to p_2 \qquad (3)(4)(MP)
\end{aligned}
$$

由演绎定理，$\vdash (p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)$ □

2. 证明下列各式成立：$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 为任意公式

(a) $\sim \mathscr{A} \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

(b) $\mathscr{A} \vdash_L \sim\sim \mathscr{A}$

(c) $\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \sim (\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \to \sim \mathscr{A} \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{C}$

证明. (a)

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \sim \mathscr{A}\\
&(2)\ \sim \mathscr{A} \to (\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A}) \qquad (L1)\\
&(3)\ \sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A} \qquad (1)(2)(MP)\\
&(4)\ (\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \qquad (L3)\\
&(5)\ \mathscr{A} \to \mathscr{B} \qquad (3)(4)(MP)
\end{aligned}
$$

(b) 先证明对任意公式 $\mathscr{B}$ 有 $\sim\sim\mathscr{B}\vdash\mathscr{B}$:

$$(1)\ \sim\sim\mathscr{B}\vdash\sim\sim\sim\sim\mathscr{B}\to\sim\sim\mathscr{B}\qquad(L1)$$
$$(2)\ (\sim\sim\sim\sim\mathscr{B}\to\sim\sim\mathscr{B})\to(\sim\mathscr{B}\to\sim\sim\sim\mathscr{B})\qquad(L3)$$
$$(3)\ \sim\sim\mathscr{B}\vdash\sim\mathscr{B}\to\sim\sim\sim\mathscr{B}\qquad(1)(2)(HS)$$
$$(4)\ (\sim\mathscr{B}\to\sim\sim\sim\mathscr{B})\to(\sim\sim\mathscr{B}\to\sim\mathscr{B})\qquad(L3)$$
$$(5)\ \sim\sim\mathscr{B}\vdash\sim\sim\mathscr{B}\to\mathscr{B}\qquad(3)(4)(HS)$$

从而 $\sim\sim(\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A})$。

$$(1)\ \sim\sim(\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A})$$
$$(2)\ (\sim\sim(\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}))\to(\mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{A})\qquad(L3)$$
$$(3)\ \mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{A}\qquad(1)(2)(MP)$$

(c)

$$(1)\ \sim(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to\sim\mathscr{A}\vdash\mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\qquad(L3)$$
$$(2)\ \mathscr{A}\to(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\vdash(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C})\qquad(L2)$$
$$(3)\ \sim(\mathscr{B}\to\mathscr{C})\to\mathscr{A}\vdash(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\mathscr{A}\to\mathscr{C})\qquad(1)(2)(HS)$$

由演绎定理，原式成立 □

3. 用演绎定理，对任意公式 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$，证明下列公式是定理：

(a) $(\mathscr{B}\to\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})$

(b) $((\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}$

证明. (a) 由 2(b) 的证明 $\sim\sim\mathscr{B}\to\mathscr{B}$，$\mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{A}$

$$(1)\ \mathscr{B}\to\mathscr{A}$$
$$(2)\ \sim\sim\mathscr{B}\to\mathscr{B}\qquad 2(b)$$
$$(3)\ \sim\sim\mathscr{B}\to\mathscr{A}\qquad(1)(2)(HS)$$
$$(4)\ \mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{A}\qquad 2(b)$$
$$(5)\ \sim\sim\mathscr{B}\to\sim\sim\mathscr{A}\qquad(3)(4)(HS)$$
$$(6)\ (\sim\sim\mathscr{B}\to\sim\sim\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\qquad(L3)$$
$$(7)\ \sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B}\qquad(5)(6)(MP)$$

(b) 由 2(a) 有 $\sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$，由 2(b) 有 $\mathscr{A}\to\sim\sim\mathscr{A}$

$$(1)\ (\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{A}$$
$$(2)\ \sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\qquad 2(a)$$
$$(3)\ \sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}\qquad(1)(2)(HS)$$
$$(4)\ \sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to(\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})))\qquad 2(a)$$
$$(5)\ (\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to(\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})))\qquad(4)(L2)$$
$$(6)\ \sim\mathscr{A}\to(\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))\qquad(3)(6)(MP)$$
$$(7)\ (\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}\qquad(7)(L3)$$
$$(8)\ \mathscr{A}\qquad(8)(3)(MP)$$

□

4. 令 L 是通过把 L 中公理模式 (L3) 替换为如下的 (L3')：$((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{A}))$，证明对 L（亦即 L'）中任何公式 $\mathscr{A},\mathscr{B}$

$(i)\vdash_L((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{A}))$

$(ii)\vdash_{L'}((\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}))$

并证明若一个公式是 L 的定理当且仅当它是 L 的定理。

证明. (i)

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B}\\
&(2)\ (\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to(\mathscr{B}\to\mathscr{A}) \qquad (L3)\\
&(3)\ \mathscr{B}\to\mathscr{A} \qquad (1)(2)(MP)\\
&(4)\ \sim\mathscr{A}\to\mathscr{B}\\
&(5)\ \sim\mathscr{A}\to\mathscr{A} \qquad (3)(4)(HS)\\
&(6)\ \sim\mathscr{A}\to(\mathscr{A}\to(\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))) \qquad 2(a)\\
&(7)\ (\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to(\sim\mathscr{A}\to(\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A}))) \qquad (6)(L2)\\
&(8)\ \sim\mathscr{A}\to(\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})) \qquad (5)(7)(MP)\\
&(9)\ (\sim\mathscr{A}\to(\sim(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})))\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A}) \qquad (L3)\\
&(10)\ (\sim\mathscr{A}\to\mathscr{A})\to\mathscr{A} \qquad (8)(9)(MP)\\
&(11)\ \mathscr{A} \qquad (5)(10)(MP)
\end{aligned}
$$

由演绎定理成立。

(ii)

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B}\\
&(2)\ (\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})\to((\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{A}) \qquad (L3')\\
&(3)\ (\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\mathscr{A} \qquad (1)(2)(MP)\\
&(4)\ \mathscr{B}\to(\sim\mathscr{A}\to\mathscr{B}) \qquad (L1)\\
&(5)\ \mathscr{B}\to\mathscr{A} \qquad (3)(4)(MP)
\end{aligned}
$$

由演绎定理成立。

tip: 之所以能用演绎定理是因为演绎定理的证明只需要用到 L1 和 L2. □

5. 什么是极大一致子集（MCS）? 定义极大一致推理 $\vdash_{MCS}$ 如下：$\Gamma\vdash_{MCS}\mathscr{A}$ 当且仅当 $MCS(\Gamma)\vdash\mathscr{A}$。试证明 $\vdash_{MCS}$ 具有平凡性和单调性。

证明. 一个公式集 Γ 称为极大一致，若：

- Γ 是一致的
- 不存在另一个公式集 Γ' 使得 $\Gamma'\subset\Gamma$

令 Γ 是一个公式集，对每个 $\Gamma'\subset\Gamma$，若 Γ' 是极大一致的，则称 Γ' 是 Γ 的极大一致子集。

假设 $\{\mathscr{A},\sim\mathscr{A}\}\subset\Gamma$，若 $\vdash_{MCS}$ 有平凡性，则对任意 $\mathscr{B}$ 有 $\Gamma\vdash_{MCS}\mathscr{B}$，但是 $\vdash_{MCS}$ 是一致的，所以 $\Gamma\vdash_{MCS}\mathscr{B}$ 与 $\Gamma\vdash_{MCS}\sim\mathscr{B}$ 不能同时成立，矛盾。

考虑单调性，对 $\Gamma\subset\Gamma'$，若 $\Gamma\vdash_{MCS}\mathscr{A}$，即 $MCS(\Gamma)\vdash\mathscr{A}$，存在一个 $MCS(\Gamma')\subset MCS(\Gamma)$，故 $\Gamma'\vdash\mathscr{A}$，所以单调性成立。 □

A.4 作业 4

1. 证明 L 的每条公理（模式）是重言式。

证明. (L1) 的真值表

$\mathscr{A}$	$\to$	$(\mathscr{B}$	$\to$	$\mathscr{A})$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
F	T	T	F	F
F	T	F	T	F

(L2) 的真值表

$(\mathscr{A}$	$\to$	$(\mathscr{B}$	$\to$	$\mathscr{C}))$	$\to$	$((\mathscr{A}$	$\to$	$\mathscr{B})$	$\to$	$(\mathscr{A}$	$\to$	$\mathscr{C}))$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T	F	F	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	F	T	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

(L3) 的真值表

$(\sim$	$\mathscr{A}$	$\to$	$\sim$	$\mathscr{B})$	$\to$	$(\mathscr{B}$	$\to$	$\mathscr{A})$
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T	F	F
T	F	T	T	F	T	F	T	F

□

2. 令 $\mathscr{A}$ 是一个 L 的公式，令 L+ 是一个通过增加 $\mathscr{A}$ 作为新公理的 L 的扩充。

(a) 证明 L+ 的定理集与 L 的定理集不同，当且仅当 $\mathscr{A}$ 不是 L 的定理。

(b) 设 $\mathscr{A}$ 为 $(\sim p_1 \to p_2) \to (p_1 \to \sim p_2)$，证明 L+ 的定理集包含 L 的定理集；L+ 是否 L 的一致扩充？

证明. (a) (1) 若 L+ 的定理集与 L 的定理集不同，取一个 L+ 的定理 $\mathscr{B}$，但不是 L 的定理，由题有 $\mathscr{A} \vdash_L \mathscr{B}$，由演绎定理有 $\vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，从而若 $\mathscr{A}$ 是定理，则 $\mathscr{B}$ 也是定理。

(2) 若 $\mathscr{A}$ 不是 L 的定理，则自然定理集不同，因为一个包含 $\mathscr{A}$，另一个不包含 $\mathscr{A}$。

(b) 令 p_1 取 T，p_2 取 T，此时 $\mathscr{A}$ 真值为 F，故 $\mathscr{A}$ 不是定理，由 (a) 得 L+ 的定理集包含 L 的定理集。

若不是一致扩充，由一致扩充的性质，有 $\vdash_{L+} \sim \mathscr{A}$，即 $\mathscr{A} \vdash_L \sim \mathscr{A}$，由演绎定理，有 $\vdash_L \mathscr{A} \to \sim \mathscr{A}$，即 $\mathscr{A} \to \sim \mathscr{A}$ 是定理，但是它在 $\mathscr{A}$ 取 T 时真值为 F，矛盾。 □

3. 证明：若 $\mathscr{B}$ 是一个矛盾，则 $\mathscr{B}$ 不能是任何 L 的一致扩充的定理。

证明. 若 $\mathscr{B}$ 是某个 L 的一致扩充 L+ 的定理，但由于 $\mathscr{B}$ 矛盾，此时 $\sim\mathscr{B}$ 也是 L+ 的定理，这与一致性矛盾。 □

4. 令 J 是 L 的一致完全扩充，$\mathscr{A}$ 是 L 的公式。证明：通过把 $\mathscr{A}$ 作为补充公理获得的 J 的扩充是一致的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是一个 J 的定理。

证明. 若通过把 $\mathscr{A}$ 作为补充公理获得的 J 的扩充 J+ 是一致的。

若 $\mathscr{A}$ 不是 J 的定理，则 $\vdash_J \sim\mathscr{A}$，则 $\vdash_{J+} \sim\mathscr{A}$，又 $\mathscr{A}$ 是 J+ 的公理，这与一致性矛盾。

若 $\mathscr{A}$ 是一个 J 的定理

对任意 J+ 中可演绎推理出的定理 $\mathscr{B}$，都可以通过补充 $\mathscr{A}$ 在 J 中的的演绎推理而由 J 中公理演绎推理出，由 J 的一致性，得 J+ 也是一致的。 □

A.5 作业 5

1. 下列句子可否形式化？若可，用一阶语言表达：

(a) 不是每个函数都有导数。

(b) 存在连续不可导的函数。

(c) 张帅说李丽说他不再理她了。

解. (a) 可以，令 $F(x)$ 表示 x 是函数，$D(x)$ 表示 x 有导数，则 $\sim(\forall x)(F(x)\to D(x))$

(b) 可以，令 $F(x)$ 表示 x 是函数，$C(x)$ 表示 x 连续，$D(x)$ 表示 x 可导，则 $(\exists x)(F(x)\wedge C(x)\wedge(\sim D(x)))$

(c) 不可以 □

2. 找一首诗歌（古诗、新诗或歌词），并用一阶语言形式化。

解. 远看山有色，近听水无声。春去花还在，人来鸟不惊。–王维《画》

令 $M(x)$ 表示 x 是山，$F(x)$ 表示在远处看 x，$C(x)$ 表示 x 色彩鲜艳，$P(x)$ 表示 x 在画中。

则第一句为 $\forall x(M(x)\wedge P(x)\to(F(x)\to C(x)))$

令 $W(x)$ 表示 x 是水，$J(x)$ 表示在近处听 x，$Q(x)$ 表示 x 没有声音

则第二句为 $\forall x(W(x)\wedge P(x)\to(J(x)\to Q(x)))$

令 $B(x)$ 表示 x 是花，$S(x)$ 表示 x 度过了春天，$V(x)$ 表示 x 消失

则第三句为 $\forall x(B(x)\wedge P(x)\to(S(x)\to(\sim V(x))))$

令 $N(x)$ 表示 x 是鸟，$Y(x)$ 表示 x 不受惊，$R(x)$ 表示 x 被人接近

则第四句为 $\forall x(N(x)\wedge P(x)\to(R(x)\to Y(x)))$

□

3. 把下列句子形式化，先只用全称量词，再只用存在量词：

(a) 不是所有汽车都有四个轮。

(b) 有些人或者懒惰或者糊涂。

解. (a) 令 $C(x)$ 表示 x 是汽车，$W(x)$ 表示 x 有四个轮，则 $\sim\forall x(C(x)\to W(x))$，$\exists x(C(x)\wedge(\sim W(x)))$

(b) 令 $P(x)$ 表示 x 是人，$L(x)$ 表示 x 懒惰，$F(x)$ 表示 x 糊涂，则 $\sim\forall x(P(x)\to((\sim L(x))\wedge(\sim F(x)))$，$\exists x(P(x)\wedge(L(x)\vee F(x)))$ □

4. 判断下列符号串哪个是（合式）公式?

(a) $A_1^2(f_1^1(x), x_1)$

(b) $f_1^3(x_1, x_3, x_4)$

(c) $(A_1^1(x_2) \to A_1^3(x_3, a_1))$

解. (a) 是，x_1 是变元，f_1^1 是函项符，A_1^2 是谓词符，由定义，是合式公式

(b) 不是，x_1, x_3, x_4 是项，f_1^3 是函项符，所以是项

(c) 不是，A_1^3 应该有 3 个变元或常元。 □

5. 下列公式中 x_1 的出现是自由或约束的?

(a) $(\forall x_2)(A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, a_1))$

(b) $(A_1^1(x_3) \to (\sim (\forall x_1)(\forall x_2)A_1^3(x_1, x_2, a_1)))$

项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 在上述公式中对 x_2 是否自由?

解. (a) 自由出现的。项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 在上公式对 x_2 自由。

(b) 两次都是约束出现的。项 $f_1^2(x_1, x_3)$ 在上公式对 x_2 自由。 □

6. 令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是 L 中 x_i 自由出现的公式，x_j 是一个不自由出现在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中的变元。证明：若 x_j 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由，则 x_i 在 $\mathscr{A}(x_j)$ 中对 x_j 自由，这里 $\mathscr{A}(x_j)$ 是对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中以 x_j 替换 x_i 的每个自由出现的结果。

证明. 由于 x_j 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由，这说明自由的 x_i 不会在 $\forall x_j$ 的辖域内，从而自由的 x_i 不会在所有 $\forall x_i$,$\forall x_j$ 的辖域内，将自由的 x_i 替换成 x_j 后，$\mathscr{A}(x_j)$ 中的自由出现的 x_j 只能是这些原来是自由的 x_i 的，这是因为 x_j 是一个不自由出现在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中的变元。从而这些 x_j 不在 $\forall x_i$ 的辖域内。故 x_i 在 $\mathscr{A}(x_j)$ 中对 x_j 自由。 □

A.6 作业 6

1. 给出 $\wedge, \vee, \exists$ 的可满足性定义。

解. v 满足 $p \vee q$，即 v 满足 $\sim p \to q$，当且仅当 v 满足 p 或者 v 满足 q;

v 满足 $p \wedge q$，即 v 满足 $\sim (\sim p \vee \sim q)$，当且仅当 v 满足 p 且 v 满足 q;

v 满足 $\exists x_i \mathscr{A}$ 当且仅当存在一个 i-等值于 v 的赋值满足 $\mathscr{A}$。 □

2. 令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是 L 的一个公式，且 x_i 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中自由出现，t 是对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中 x_i 自由的项；设 v 是一赋值，v' 是 i-等值于 v 的另一赋值且 $v'(x_i) = v(t)$，则如果 v 满足 $\mathscr{A}(t)$ 那么 v' 满足 $\mathscr{A}(x_i)$。

证明. 用归纳法。

若 $\mathscr{A}(x_i)$ 是原子 $A_j^n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$

则 v 满足 $\mathscr{A}(t)$ 即 $\bar{A}_j^n(v(t_1(x_i/t)), \cdots, t_n(x_i/t))$ 在 D_I 中为真,v' 满足 $\mathscr{A}(x_i)$ 即 $\bar{A}_j^n(v'(t_1), \cdots, v'(t_n))$ 在 D_I 中为真。

每个 t_k 都是项，只需证 $v(t_k(x_i/t)) = v'(t_k)$

用归纳法，若 t_k 有 0 个函项符，由 v' 的定义可以看出 $v(t_k(x_i/t)) = v'(t_k)$

若 t_k 有 r>1 个函项符且小于 r 个函项符的项都有上式成立：

记 t_k 为 $f(s_1, s_2, \cdots, s_m)$,每个 $s_{k'}$ 都是项,他们有 $v(s_{k'}(x_i/t)) = v'(s_{k'})$,故 $\bar{f}(v(s_1(x_i/t)), \cdots, v(s_m(x_i/t))) = \bar{f}(v'(s_1), \cdots, v'(s_m))$

证毕

若原命题对度小于 N 的公式均成立，且 $\mathscr{A}(x_i)$ 度为 N>1。

（1）$\mathscr{A}(x_i)$ 为 $\sim \mathscr{B}$

则 v 满足 $\mathscr{A}(t)$ 即 v 不满足 $\mathscr{B}(x_i/t)$；v' 满足 $\mathscr{A}(x_i)$ 即 v' 不满足 $\mathscr{B}$。由于 $\mathscr{B}$ 度小于 N，由归纳假设，两者等价。

（2）$\mathscr{A}(x_i)$ 为 $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$

则 v 满足 $\mathscr{A}(t)$ 即 v 要么满足 $\sim \mathscr{B}(x_i/t)$ 或者满足 $\mathscr{C}(x_i/t)$；v' 满足 $\mathscr{A}(x_i)$ 即 v' 要么满足 $\sim \mathscr{B}(x_i)$ 要么满足 $\mathscr{C}(x_i)$。由归纳假设，两者等价。

（3）$\mathscr{A}(x_i)$ 为 $(\forall x_j)\mathscr{B}$

由题，$j \neq i$，则 v 满足 $\mathscr{A}(t)$ 即对每个 i-等值于 v 的赋值 v" 满足 $\mathscr{B}(x_i/t)$；v' 满足 $\mathscr{A}(x_i)$ 即对每个 i-等值于 v' 的赋值 v"' 满足 $\mathscr{B}$，由于 t 对 x_i 是自由的，因此 v" 与 v"' 两者相等，故等价。 □

3. 令 L 是一阶语言，除变元、技术性符号、连词和量词外，包含个体常元符 a_1，函项符 f_1^2 和谓词符 A_2^2，令 $\mathscr{A}$ 为如下公式：

$$\forall x_1 \forall x_2 (A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1) \to A_2^2(x_1, x_2))$$

定义 L 的解释 I 如下：D_I 为 $\mathbb{Z}$，$\bar{a_1}$ 为 0，$\bar{f_1^2}(x,y)$ 为 $x-y$，$\bar{A_2^2}(x,y)$ 为 $x<y$。

给出 $\mathscr{A}$ 在 I 下的解释，并判断它为真或假；给出另一个解释使得 $\mathscr{A}$ 的真值相反。

在解释 I 下，若可能给出满足和不满足以下公式的赋值：

$$\forall x_1 A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$$

以下闭式为真或假

$$\forall x_1 A_2^2(f_1^2(a_1, x_1), a_1)$$

解. 在 I 下的解释为：任意整数 x、y，若 $x-y<0$，则 $x<y$，这个解释为真。

I' 如下：$D_{I'}$ 为 $\mathbb{Z}$，$\bar{a_1}$ 为 0，$\bar{f_1^2}(x,y)$ 为 $x+y$，$\bar{A_2^2}(x,y)$ 为 $x<y$。

在 I' 下为假。

在 I 下，闭式解释为任意 x_1 为整数，$0-x_1<0$ 为假 □

4. 是否有一个（合适的 L ）解释使得公式

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^1(f_1^1(x_1)))$$

被解释为假？若有，则给出这个解释；若没有，说明理由。

证明. A_1^1 表示是正数，f_1^1 表示取相反数。 □

5. 在算术解释 N 中，若可能，给出满足和不满足以下公式的赋值：

$$\forall x_1 A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_3)$$

证明. $v(x_1)=0, v(x_2)=0, v(x_3)=0$ ，v 满足；

$v(x_1)=0, v(x_2)=0, v(x_3)=1$ 时，v 不满足。 □

A.7 作业 7

1. 以下公式是否逻辑有效，试证之：

(a) $\exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 \exists x_1 A_1^2(x_1, x_2)$

(b) $\forall x_2 \exists x_1 A_1^2(x_1, x_2) \to \exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$

证明. (a) 对任意解释 I 和赋值 v，若 v 不满足 $\exists x_1\forall x_2 A_1^2(x_1,x_2)$，则显然 v 满足 $\exists x_1\forall x_2 A_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_2\exists x_1 A_1^2(x_1,x_2)$

若 v 满足 $\exists x_1\forall x_2 A_1^2(x_1,x_2)$，则存在一个 1-等值于 v 的 v' 使得 v' 满足 $\forall x_2 A_1^2(x_1,x_2)$，此即意为每一个 2-等值于 v' 的 v" 都满足 $A_1^2(x_1,x_2)$。

对每个 2-等值于 v 的 v"'，取一个 v""1-等值于 v"' 且 $v''''(x_1)=v'''(x_1)$，他 2-等值于 v'，这表明 v"" 满足 $A_1^2(x_1,x_2)$，故 v''' 满足 $\exists x_1 A_1^2(x_1,x_2)$，故 v 满足 $\forall x_2\exists x_1 A_1^2(x_1,x_2)$

(b) 不有效，在 $\mathbb{Z}$ 中，令 A_1^2 表示相等，对任意 x_2，存在 $x_1=x_2$ 是对的，存在 x_1 对任意 x_2 都有 $x_1=x_2$ 是错的。 □

2. 给出一个逻辑有效开式的例子

解. $A(x)\to A(x)$

首先显然它是开的，其次它是 $p\to p$ 的替换实例，这是重言式。 □

3. 证明：若 t 是在公式 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由的项，则公式 $\mathscr{A}(t)\to\exists x_i\mathscr{A}(x_i)$ 是（逻辑）有效的。

证明. 若 v 不满足 $\mathscr{A}(t)$，则有效

若 v 满足 $\mathscr{A}(t)$，取 v' 是 i-等值于 v，且 $v'(x_i)=v(t)$，当 x_i 是自由变元时，v' 满足 $\mathscr{A}(x_i)$，故 v 满足 $\exists x_i\mathscr{A}(x_i)$；若不自由出现，则 $\mathscr{A}(t)$ 即为 $\mathscr{A}(x_i)$，从而 v 满足 $\exists x_i\mathscr{A}(x_i)$ □

4. 给出以下公式的 Skolem 式：

$$(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)((\sim A_1^2(x_1,x_2)\vee A_2^1(x_1))\to A_2^2(x_3,x_4))$$

解.

$$(\forall x_1)(\forall x_3)((\sim A_1^2(x_1,h_1^1(x_1))\vee A_2^1(x_1))\to A_2^2(x_3,h_2^2(x_1,x_3)))$$

□

5. 令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是一个含自由变元 x_i 的公式，一个项 t 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由，设一个赋值 v 使得 $v(t)=v(x_i)$，证明 $v\vDash\mathscr{A}(t)$ 当且仅当 $v\vDash\mathscr{A}(x_i)$。

证明. 利用命题 3.41，v 可以理解为 i-等值于 v 的 v'，且 $v'(x_i)=v(t)$，得两者等价。 □

A.8 作业 8

1. 证明以下各式是 K_L 的定理，要求写出形式证明：

(a) $\forall x_1(A_1^1(x_1)\to A_1^1(x_1))$

(b) $\exists x_i(\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to(\forall x_i\mathscr{A}\to\mathscr{B})$，$x_i$ 不在 $\mathscr{B}$ 中自由出现

(c) $(\exists x_i\mathscr{A}\to\mathscr{B})\to\forall x_i(\mathscr{A}\to\mathscr{B})$，$x_i$ 不在 $\mathscr{B}$ 中自由出现

(d) $\sim\forall x_i\mathscr{A}\to\exists x_i\sim\mathscr{A}$

证明. (a)

$$\begin{aligned}&(1)\ A_1^1(x_1)\to A_1^1(x_1)\\&(2)\ \forall x_1(A_1^1(x_1)\to A_1^1(x_1))\qquad (1)(Gen)\end{aligned}$$

(b) x_i 在 $(\forall x_i\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 无自由出现

$$(1)\ \forall x_1\mathscr{A}$$
$$(2)\ \mathscr{A} \qquad (1)(K4)or(K5)$$
$$(3)\ \mathscr{A}, \mathscr{A} \to \mathscr{B} \vdash \mathscr{B} \qquad (MP)$$
$$(4)\ \mathscr{A} \vdash (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{B}$$
$$(5)\ (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{B} \qquad (2)(4)(MP)$$
$$(6)\ \sim\sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$$
$$(7)\ \mathscr{B} \to\sim\sim \mathscr{B}$$
$$(8)\ \sim\sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to\sim\sim \mathscr{B}$$
$$(9)\ \sim \mathscr{B} \to\sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \qquad (8)(K3)$$
$$(10)\ \sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \forall x_i \sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \qquad (Gen)$$
$$(11)\ \sim \mathscr{B} \to \forall x_i \sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \qquad (9)(10)(HS)$$
$$(12)\ \sim \forall x_i \sim (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \mathscr{B} \qquad \text{同上}$$
$$(13)\ \forall x_1\mathscr{A}, \exists x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash \mathscr{B} \qquad \text{演绎定理的逆}$$
$$(14)\ \vdash \exists x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\forall x_i\mathscr{A} \to \mathscr{B})$$

(c)x_i 不在 $(\exists x_i\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 自由出现

$$(1)\ \exists x_i\mathscr{A} \to \mathscr{B}$$
$$(2)\ \mathscr{B} \to\sim\sim \mathscr{B}$$
$$(3)\ \exists x_i\mathscr{A} \to\sim\sim \mathscr{B} \qquad (1)(2)(HS)$$
$$(4)\ \sim \mathscr{B} \to \forall x_i \sim \mathscr{A} \qquad (3)(K3)$$
$$(5)\ \forall x_i \sim \mathscr{A} \to\sim \mathscr{A} \qquad (K4)or(K5)$$
$$(6)\ \sim \mathscr{B} \to\sim \mathscr{A} \qquad (4)(5)(HS)$$
$$(7)\ \mathscr{A} \to \mathscr{B} \qquad (6)(K3)$$
$$(8)\ \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \qquad (Gen)$$

由演绎定理成立。

(d)

$$(1)\ \sim\sim \mathscr{A} \to \mathscr{A}$$
$$(2)\ \forall x_i(\sim\sim \mathscr{A} \to \mathscr{A})$$
$$(3)\ \forall x_i \sim\sim \mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{A} \qquad (2)(K6')$$
$$(4)\ \sim\sim (\forall x_i \sim\sim \mathscr{A}) \to \forall x_i \sim\sim \mathscr{A}$$
$$(5)\ \forall x_i\mathscr{A} \to\sim\sim (\forall x_i\mathscr{A})$$
$$(6)\ \sim\sim (\forall x_i \sim\sim \mathscr{A}) \to\sim\sim (\forall x_i\mathscr{A}) \qquad (3)(4)(5)(HS)$$
$$(7)\ \sim (\forall x_i\mathscr{A}) \to\sim (\forall x_i \sim\sim \mathscr{A}) \qquad (6)(K3)$$

此即原式 □

2. (a) 指出下列形式证明是否有错:

(1) $(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)$ 假设

(2) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)$ (1), 概括

(3) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2)$ $(K5)$

(4) $(\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2)$ $(2),(3),MP$

因此，$(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2)$

故由演绎定理 $\vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2)$

(b) 给出一个合适的解释，证明公式 $\vdash_K (\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2) \to (\exists x_2)A_1^2(x_2,x_2)$ 不是逻辑有效的，因此不是 K 的定理。

证明. (a) 第三条中，x_2 对 x_1 不一定自由，故不能使用 K5

(b) 在实数中，令 A_1^2 表示不相等，则对任意 x_1 存在 x_2 与它不相等，是对的，存在 x_2 使得 x_2 与 x_2 不相等是错的。 □

A.9 作业 9

1. 证明: (a) $\forall x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1,x_2) \vdash_K \forall x_2 \forall x_3 A_1^2(x_2,x_3)$

(b) $\forall x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1,x_2) \vdash_K \forall x_1 A_1^2(x_1,x_1)$

证明. (a)

(1) $\forall x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1,x_2)$

(2) $\forall x_2 \forall x_1 A_1^2(x_1,x_2)$

(3) $\forall x_1 A_1^2(x_1,x_2)$ $(2)(K4orK5)(MP)$

(4) $A_1^2(x_3,x_2)$ $(3)(K5)(MP)$

(5) $\forall x_2 A_1^2(x_3,x_2)$ $(4)(Gen)$

(6) $\forall x_3 \forall x_2 A_1^2(x_3,x_2)$ $(5)(Gen)$

此即右式

(b)

(1) $\forall x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1,x_2)$

(2) $\forall x_2 A_1^2(x_1,x_2)$ $(1)(K4orK5)(MP)$

(3) $A_1^2(x_1,x_1)$ $(2)(K5)(MP)$

(4) $\forall x_1 A_1^2(x_1,x_1)$ $(3)(Gen)$

□

2. 令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是一个 L 的公式，其中 x_i 自由出现，设 x_j 不在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中出现（自由或约束出现），证明:

$$\vdash_K \exists x_i \mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow \exists x_j \mathscr{A}(x_j)$$

证明.

(1) $\forall x_i \sim \mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow \forall x_j \sim \mathscr{A}(x_j)$

(2) $\sim \forall x_i \sim \mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow \sim \forall x_j \sim \mathscr{A}(x_j)$

(3) $\exists x_i \mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow \exists x_j \mathscr{A}(x_j)$

□

3. 对下列公式，给出子句范式：

(b) $\forall x_1(A_1^2(x_1,x_2) \to \forall x_2 A_1^2(x_1,x_2))$

(c) $\forall x_1(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_1,x_2)) \to (\exists x_2 A_1^1(x_2) \to \exists x_3 A_1^2(x_2,x_3))$

解. (1) $\sim A_1^2(x_1,x_2) \vee A_1^2(x_1,x_3)$

(2) $(A_1^1(c_1) \vee \sim A_1^1(x_4) \vee A_1^2(x_2,c_3)) \vee (\sim A_1^2(c_1,x_2) \vee \sim A_1^1(x_4) \vee A_1^2(x_2,c_3))$ □

4. 令 $\mathscr{A}(x_1)$ 是一个其中 x_2 不出现的公式，$\mathscr{B}(x_2)$ 是一个其中 x_1 不出现的公式，设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 不含量词。

证明公式:$\exists x_1 \mathscr{A}(x_1) \to \exists x_2 \mathscr{B}(x_2)$

是可证等价于有 Π_2 和 Σ_2 式的前束范式。

证明. $(\exists x_1 \mathscr{A}(x_1) \to \exists x_2 \mathscr{B}(x_2)) \leftrightarrow (\exists x_2(\exists x_1 \mathscr{A} x_1 \to \mathscr{B}(x_2))) \leftrightarrow (\exists x_2 \forall x_1(\mathscr{A}(x_1 \to \mathscr{B}(x_2))))$

$(\exists x_1 \mathscr{A}(x_1) \to \exists x_2 \mathscr{B}(x_2)) \leftrightarrow (\forall x_1(\mathscr{A}(x_1) \to \exists x_2 \mathscr{B}(x_2))) \leftrightarrow (\forall x_1 \exists x_2(\mathscr{A}(x_1 \to \mathscr{B}(x_2))))$ □

A.10 作业 10

1. 证明：K_L 的扩充 S 是不一致的当且仅当 L 的每个公式都是 S 的定理。

证明. ⇒ 若 S 是不一致的，则存在某个公式 $\mathscr{A}$，使得 $\vdash_S \mathscr{A}$ 且 $\vdash_S \sim \mathscr{A}$，因为 $\mathscr{A} \to (\sim \mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 是重言式，有 $\vdash_S \mathscr{A} \to (\sim \mathscr{A} \to \mathscr{B})$，对所有 $\mathscr{B}$，用两次 MP 规则得到对所有的 B，都有 $\vdash_S \mathscr{B}$，即 L 每一个公式都是 S 的定理。

⇐ 若 L 每一个公式都是 S 的定理，则对任意的公式 $\mathscr{A}$，都有 $\vdash_S \mathscr{A}$ 且 $\vdash_S \sim \mathscr{A}$ ，即 S 是不一致的。 □

2. 令 S 是一个一致一阶系统，使得对每个 S 的闭式 $\mathscr{A}$，若包 $\mathscr{A}$ 作为补充公理获得的（一阶）系统是一致的，则 $\mathscr{A}$ 是一个 S 的定理，证明 S 是完全的。

证明. 若 S 不是完全的，则存在一个闭公式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim \mathscr{A}$ 都不是 S 的定理。若 $\mathscr{A}$ 不是 S 的定理，则将 $\sim \mathscr{A}$ 作为补充公理获得的系统是一致的，而又由题目可知，对于闭式 $\sim \mathscr{A}$ 来说，它满足：包含 $\sim \mathscr{A}$ 作为补充公理获得的系统是一致的，故它是 S 的定理，即 $\sim \mathscr{A}$ 是 S 的定理，这与 $\mathscr{A}$ 和 $\sim \mathscr{A}$ 都不是 S 的定理矛盾，故 S 是完全的。 □

3. 令 L 是一个具有无穷多个谓词符的一阶语言，证明 K_L 具有无穷多个不同的一致扩充。

证明. 任何原子公式或它的否定都不是 K_L 的一个定理。K_L 是一致的一阶系统，且原子公式对应的全称闭式也不是 K_L 的定理，将它的否定作为公理加入 K_L 得到的 S 是一致的，且不同的谓词符得到的全称闭式不同，由题目可知 L 是一个具有无穷多个谓词符的一阶语言，故 K_L 具有无穷多个不同的一致扩充。 □

4. 令 Γ 是一个 L 的公式集，M 是一个 Γ 的模型，证明若 $\Gamma \vdash_{K_L} \mathscr{A}$ ，则 $\mathscr{A}$ 在 M 中为真；反之亦然?

证明.（对证明步骤进行归纳）

起步：若 $\mathscr{A}$ 的证明只有一步，则 $\mathscr{A}$ 是公理或 $\mathscr{A}$ 属于，则 $\mathscr{A}$ 在模型 M 下为真。

归纳步：假设关于 $\mathscr{A}$ 的证明有 n 步，且小于 n 步的证明均成立（归纳假设），则 $\mathscr{A}$ 有如下几种情况:

- $\mathscr{A}$ 是公理或 $\mathscr{A}$ 属于 Γ，成立

- $\mathscr{A}$ 是由前面两个公式 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ 应用 MP 得到的，则由归纳假设可知 $M \models \mathscr{B}$ 和 $M \models \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ ，即 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ 在 M 中为真，故 $\mathscr{A}$ 在 M 中为真。

- $\mathscr{A}$ 是由前面的公式 $\mathscr{B}$ 应用概括规则得到的，即 $\mathscr{A}$ 是 $\forall x_i \mathscr{B}$。由于 $\mathscr{B}$ 在 M 中为真，则在为真的条件下，添加全称量词与不添加一样，即 $\forall x_i \mathscr{B}$ 在 M 中为真，$\mathscr{A}$ 在 M 中为真。

反之不一定成立，一个公式在 K_L 的某个特殊的模型下为真，并不一定是 K_L 的定理，如 Γ 为空。 □

5. 令 S 是一个 K_L 的一致扩充，M 是一个 S 的模型，定义一个 S 的扩充 S* 如下：包含所有 L 的在 M 中为真的闭原子和在 M 中不为真的闭原子的否定式作为补充公理，证明 S* 是一致的。问 S* 必是完全的吗?

解. 由于 M 是一个 S 的模型，S 中的每个公理在 M 下都为真。而 S* 是由 S 扩充多个公理产生的：若 L 的闭原子在 M 中为真，则将它作为公理扩充进 S*；若 L 的闭原子在 M 中不为真，则将它的否定作为公理补充进 S*，如此得到的扩充 S* 的公理在 M 下都为真。故 M 是一个 S* 的模型，故 S* 是一致的。但不一定是完全的，因为 L 中可能没有闭原子公式，此时 S* 和 S 一样，若 S 是不完全的，则 S* 也是不完全的。 □

A.11 作业 11

1. 令 S 是一个带等词的一阶系统，设闭式 $\mathscr{A}$ 在 S 的所有规范模型中为真，证明 $\mathscr{A}$ 在 S 的所有模型中为真。

证明. 若存在一个模型 M 使得在 M 中 $\mathscr{A}$ 不为真，则 $\mathscr{A}$ 不是 S 中的定理，从而 S 加入 $\sim \mathscr{A}$ 作为公理后的扩充 S' 一致。

记 S' 的规范模型为 M'，M' 中 $\sim \mathscr{A}$ 为真，故 S 有一个规范模型下 $\sim \mathscr{A}$ 为真，矛盾。 □

2. 在带等词的一阶系统中定义量词“存在仅两个”。

解.

$$(\exists_2 x_i)(\mathscr{A}(x_i)) =_{def} (\exists x_1)(\exists x_2)(\mathscr{A}(x1) \wedge \mathscr{A}(x_2) \wedge (\sim (x_1 = x_2)) \wedge (\forall x_3)(\mathscr{A}(x_3) \to ((x_3 = x_1) \vee (x_3 = x_2))))$$

□

3. 描述一个关于域论的一阶系统，包括其一阶语言和公理（模式）集。

解. 令 L_F 是具有下述字符表的一阶语言

- 变元 $x_1, \cdots$
- 个体常元 a_1（单位元）
- 函项符 f_1^1, f_1^2, f_2^2（逆，和，积）
- 谓词符 $=$
- 技术性符号 ”(”,”)”
- 逻辑符 $\forall, \sim, \to$

$\mathscr{F}$ 为 K_{L_F} 的扩充，其合适公理包含 (E7)(E8)(E9) 的所有适当实例，以及以下公理

$(F1) f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3) = f_1^2(x_1, f_1^2(x_2, x_3))$（加法结合律）

$(F2) f_1^2(a_1, x_1) = x_1$ （左单位元）

$(F3) f_1^2(f_1^1(x_1), x_1) = a_1$ （左逆元）

$(F4) f_1^2(x_1, x_2) = f_1^2(x_2, x_1)$ （加法交换律）

$(F5) f_2^2(f_2^2(x_1, x_2), x_3) = f_2^2(x_1, f_2^2(x_2, x_3))$（乘法结合律）

$(F6) f_2^2(x_1, x_2) = f_2^2(x_2, x_1)$ （乘法交换律）

$(F7) f_2^2(x_1, f_1^2(x_2, x_3)) = f_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_1, x_3))$（乘法分配律） □

4. 在带等词的一阶系统中，证明

(a) $\vdash (\forall x)(\mathscr{A}(x) \leftrightarrow (\exists y)(x = y \wedge \mathscr{A}(y)))$，y 不出现在 $\mathscr{A}(x)$ 中

(b) $\vdash (\forall x)(\exists y)x = y$

证明. (a) 令 $\mathscr{B}(x,y)$ 表示 $(x = y \wedge \mathscr{A}(y))$，重言式有 $\mathscr{A}(x) \to x = x \wedge \mathscr{A}(x)$，有 $\mathscr{A}(x) \to \mathscr{B}(x,x)$，应用 (R4) 存在规则及 HS 有 $\vdash \mathscr{A}(x) \to (x = y \wedge \mathscr{A}(y))$

$(x = y \wedge \mathscr{A}(y)) \to x = y$,$(x = y \wedge \mathscr{A}(y)) \to \mathscr{A}(y)$,$x = y \to \mathscr{A} =$, 应用两次 MP$(x = y \wedge \mathscr{A}(y)) \to \mathscr{A}(x)$

故 $\vdash (\forall x)(\mathscr{A}(x) \leftrightarrow (\exists y)(x = y \wedge \mathscr{A}(y)))$

(b) 令 $\mathscr{A}(x,y)$ 为 x=y，公理 $\forall xx = x$，利用 (R4) 及 MP 有 $\exists y \forall xx = y$ □

The End