

09-21 年三角函数

题 1 (2021.5). 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 1, AC = 2, B - C = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____。

题 2 (2020.5). 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6, BC = 4$, 边 AC 的中线长为 $\sqrt{10}$, 则 $\sin^6 \frac{A}{2} + \cos^6 \frac{A}{2}$ 的值为_____。

题 3 (2020.9). 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 $\cos B + \sqrt{2} \cos C$ 的取值范围。

题 4 (2019.6). 对任意闭区间 I , 用 M_I 表示函数 $y = \sin x$ 在 I 上的最大值, 若正数 a 满足 $M_{[0,a]} = 2M_{[a,2a]}$, 则 a 的值为_____。

题 5 (2019.9). 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = a, CA = b, AB = c$, 若 b 是 a 与 c 的等比中项, 且 $\sin A$ 是 $\sin(B - A)$ 与 $\sin C$ 的等差中项, 求 $\cos B$ 的值。

题 6 (2018.7). 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, 则 $\sin \angle BAC =$ _____。

题 7 (2017.2). 若实数 x, y 满足 $x^2 + 2 \cos y = 1$, 则 $x - \cos y$ 的取值范围为_____。

题 8 (2017.7). 在 $\triangle ABC$ 中, M 是边 BC 的中点, N 是边 BM 的中点, 若 $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的最小值为_____。

题 9 (2016.6). 设函数 $f(x) = \sin^4 \frac{kx}{10} + \cos^4 \frac{kx}{10}$, 其中 k 是一个正整数, 若对任意实数 a , 均有 $\{f(x) | a < x < a + 1\} = \{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$, 则 k 的最小值为_____。

题 10 (2016.9). 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$, 求 $\sin C$ 的最大值。

题 11 (2015.2). 若实数 α 满足 $\cos \alpha = \tan \alpha$, 则 $\frac{1}{\sin \alpha} + \cos^4 \alpha =$ _____。

题 12 (2015.7). 设 w 是正实数, 若存在 $a, b (\pi \leq a < b \leq 2\pi)$, 使得 $\sin wa + \sin wb = 2$, 则 w 的取值范围是_____。

题 13 (2014.7). 设等边三角形 ABC 的内切圆半径为 2, 圆心为 I , 若点 P 满足 $PI = 1$, 则 $\triangle APB$ 和 $\triangle APC$ 的面积之比最大值为_____。

题 14 (2014.10). 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{\pi}{6}$, $a_{n+1} = \arctan(\sec a_n)$, 求正整数 m 使得

$$\sin a_1 \sin a_2 \cdots \sin a_m = \frac{1}{100}$$

题 15 (2013.3). 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A = 10 \sin B \sin C, \cos A = 10 \cos B \cos C$, 则 $\tan A =$ _____。

题 16 (2012.2). 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且满足 $a \cos B - b \cos A = \frac{3}{5}c$, 则 $\frac{\tan A}{\tan B} =$ _____。

题 17 (2012.7). 满足 $\frac{1}{4} < \sin \frac{\pi}{n} < \frac{1}{3}$ 的所有正整数 n 的和为_____。

题 18 (2012.9). 已知函数 $f(x) = a \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x + a - \frac{3}{a} + \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

(1) 若对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x) \leq 0$, 求 a 的取值范围

(2) 若 $a \geq 2$, 且存在 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x) \leq 0$, 求 a 的取值范围

题 19 (2011.4). 如果 $\cos^5 \theta - \sin^5 \theta < 7(\sin^3 \theta - \cos^3 \theta), \theta \in [0, 2\pi)$, 那么 θ 的取值范围为_____。

题 20 (2010.2). 已知函数 $y = (a \cos^2 x - 3) \sin x$ 的最小值 -3, 则实数 a 的取值范围为_____。