

09-21 年函数、等式和不等式（除三角函数）

题 1 (2021.3). 设函数 $f(x)$ 满足：对任意非零实数 x ，均有 $f(x) = f(1) \cdot x + \frac{f(2)}{x} - 1$ ，则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最小值为_____。

题 2 (2021.4). 设函数 $f(x) = \cos x + \log_2 x (x > 0)$ ，若正实数 a 满足 $f(a) = f(2a)$ ，则 $f(2a) - f(4a)$ 的值为_____。

题 3 (2020.3). 设 $a > 0$ ，函数 $f(x) = x + \frac{100}{x}$ 在区间 $(0, a]$ 上的最小值为 m_1 ，在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 m_2 。若 $m_1 m_2 = 2020$ ，则 a 的值为_____。

题 4 (2020.7). 设 $a, b > 0$ ，满足：关于 x 的方程 $\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+a|} = b$ 恰有三个不同的解 x_1, x_2, x_3 ，且 $x_1 < x_2 < x_3 = b$ ，则 $a + b =$ _____。

题 5 (2020.10). 对正整数 n 以及实数 $x (0 \leq x < n)$ ，定义 $f(n, x) = (1 - \{x\})C_n^{[x]} + \{x\}C_n^{[x]+1}$ ，若整数 $m, n \geq 2$ 满足

$$f(m, \frac{1}{n}) + f(m, \frac{2}{n}) + \cdots + f(m, \frac{mn-1}{n}) = 123$$

求 $f(n, \frac{1}{m}) + f(n, \frac{2}{m}) + \cdots + f(n, \frac{mn-1}{m})$ 。

题 6 (2019.1). 已知正实数 a 满足 $a^a = (9a)^{8a}$ ，则 $\log_a 3a$ 的值为_____。

题 7 (2018.5). 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上以 2 为周期的偶函数，在区间 $[0, 1]$ 上严格递减，且满足 $f(\pi) = 1, f(2\pi) = 2$ ，则不等式组 $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq f(x) \leq 2 \end{cases}$ 的解集为_____。

题 8 (2018.9). 已知定义在 \mathbb{R}^+ 上的函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} |\log_3 x - 1|, & 0 < x \leq 9, \\ 4 - \sqrt{x}, & x > 9 \end{cases}$$

设 a, b, c 是三个互不相同的实数，满足 $f(a) = f(b) = f(c)$ ，求 abc 的取值范围。

题 9 (2017.1). 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的函数，对任意实数 x 有 $f(x+3)f(x-4) = -1$ ，又当 $0 \leq x < 7$ 时， $f(x) = \log_2(9-x)$ ，则 $f(-100)$ 的值为_____。

题 10 (2017.9). 设 k, m 为实数，不等式 $|x^2 - km - m| \leq 1$ 对所有 $x \in [a, b]$ 成立，证明： $b - a \leq 2\sqrt{2}$ 。

题 11 (2017.10). 设 x_1, x_2, x_3 是非负实数，满足 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ，求

$$(x_1 + 3x_2 + 5x_3)(x_1 + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{5})$$

的最小值和最大值。

题 12 (2016.1). 设实数 a 满足 $a < 9a^3 - 11a < |a|$ ，则 a 的取值范围为_____。

题 13 (2016.3). 正实数 u, v, w 均不等于 1，若 $\log_u vw + \log_v w = 5, \log_v u + \log_w v = 3$ ，则 $\log_w u$ 的值为_____。

题 14 (2016.10). 已知 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的奇函数， $f(1) = 1$ ，且对任意 $x < 0$ ，均有 $f(\frac{x}{x-1}) = xf(x)$ ，求

$$f(1)f(\frac{1}{100}) + f(\frac{1}{2})f(\frac{1}{99}) + \cdots + f(\frac{1}{50})f(\frac{1}{51})$$

的值。

题 15 (2015.1). 设 a, b 为不相同的实数, 若二次函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 满足 $f(a) = f(b)$, 则 $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 16 (2015.9). 若实数 a, b, c 满足 $2^a + 4^b = 2^c, 4^a + 2^b = 4^c$, 求 c 的最小值。

题 17 (2014.1). 若正数 a, b 满足 $2 + \log_2 a = 3 + \log_3 b = \log_6(a + b)$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 18 (2014.3). 若函数 $f(x) = x^2 + a|x - 1|$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 19 (2013.5). 设 a, b 是实数, 函数 $f(x) = ax + b$ 满足: 对任意 $x \in [0, 1]$, 有 $|f(x)| \leq 1$, 则 ab 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 20 (2013.7). 若实数 x, y 满足 $x - 4\sqrt{y} = 2\sqrt{x - y}$, 则 x 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 21 (2013.11). 设函数 $f(x) = ax^2 + b$, 求所有的正实数对 (a, b) , 使得对任意实数 x, y 均有 $f(xy) + f(x + y) \geq f(x)f(y)$ 。

题 22 (2012.3). 设 $x, y, z \in [0, 1]$, 则 $M = \sqrt{|x - y|} + \sqrt{|y - z|} + \sqrt{|z - x|}$ 的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 23 (2012.6). 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2$, 若对任意的 $x \in [a, a + 2]$, 不等式 $f(x + a) \geq 2f(x)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 24 (2011.2). 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$ 的值域为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 25 (2011.3). 设 a, b 是正实数, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}, (a - b)^2 = 4(ab)^3$, 则 $\log_a b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 26 (2011.9). 设函数 $f(x) = |\lg(x + 1)|$, 实数 $a, b (a < b)$ 满足 $f(a) = f(-\frac{b + 1}{b + 2}), f(10a + 6b + 21) = 4\lg 2$, 求 a, b 的值。

题 27 (2010.1). 函数 $f(x) = \sqrt{x - 5} - \sqrt{24 - 3x}$ 的值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 28 (2010.5). 函数 $f(x) = a^{2x} + 3a^x - 2 (a > 0, a \neq 1)$ 在区间 $x \in [-1, 1]$ 上的最大值为 8, 则它在这个区间的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 29 (2010.9). 函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $|f'(x)| \leq 1$, 试求 a 的最大值。

题 30 (2010.11). 证明: 方程 $2x^3 + 5x - 2 = 0$ 恰有一个实数根 r , 且存在唯一的严格递增正整数数列 $\{a_n\}$, 使得 $\frac{2}{5} = r^{a_1} + r^{a_2} + r^{a_3} + \dots$ 。

题 31 (2009.1). 若函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, 则 $f^{(99)}(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 32 (2009.4). 使不等式 $\frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \dots + \frac{1}{2n + 1} < a - 2007\frac{1}{3}$ 对一切正整数 n 都成立的最小正整数 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 33 (2009.6). 若方程 $\lg kx = 2\lg(x + 1)$ 仅有一个实根, 那么 k 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

题 34 (2009.11). 求函数 $y = \sqrt{x + 27} + \sqrt{13 - x} + \sqrt{x}$ 最大和最小值。