

09-21 年平面解析几何

题 1 (2021.6). 在平面直角坐标系中, 抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 Γ 上一点 P (异于 O) 作 Γ 的切线, 与 y 轴交于点 Q , 若 $|FP| = 2, |FQ| = 1$, 则向量 OP 与 OQ 的数量积为_____。

题 2 (2021.10). 在平面直角坐标系中, 函数 $y = \frac{x+1}{|x|+1}$ 的图像上有三个不同的点位于直线 l 上, 且三个点的横坐标之和为 0 , 求 l 的斜率的取值范围。

题 3 (2020.2). 在椭圆 Γ 中, A 为长轴的一个端点, B 为短轴的一个端点, F_1, F_2 为两个焦点。若 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} + \overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BF_2} = 0$, 则 $\frac{|AB|}{|F_1F_2|}$ 的值为_____。

题 4 (2020.11). 在平面直角坐标系中, 点 A, B, C 在双曲线 $xy = 1$ 上满足 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最小值。

题 5 (2019.4). 设 A, B 为椭圆 Γ 的长轴顶点, E, F 为 Γ 的两个焦点, $|AB| = 4, |AF| = 2 + \sqrt{3}$, P 为 Γ 上一点, 满足 $|PE| \cdot |PF| = 2$, 则 $\triangle PEF$ 的面积为_____。

题 6 (2019.10). 在平面直角坐标系中, 圆 Ω 与抛物线 $\Gamma: y^2 = 4x$ 恰有一个公共点, 且圆 Ω 与 x 轴相切于 Γ 的焦点 F , 求圆 Ω 的半径。

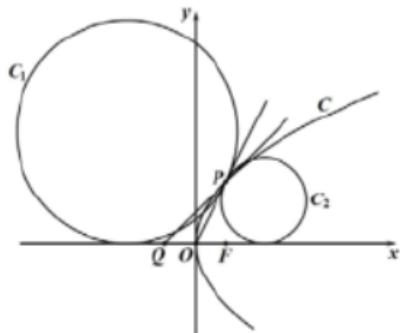
题 7 (2018.4). 在平面直角坐标系中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 椭圆 C 的弦 ST 与 UV 分别平行于 x 轴与 y 轴, 且相交于点 P 。已知线段 PU, PS, PV, PT 的长分别为 $1, 2, 3, 6$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为_____。

题 8 (2018.11). 在平面直角坐标系中, 设 AB 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的过点 $F(1, 0)$ 的弦, $\triangle AOB$ 的外接圆交抛物线于点 P (不同于点 O, A, B)。若 PF 平分 $\angle APB$, 求 $|PF|$ 的所有可能值。

题 9 (2017.3). 在平面直角坐标系中, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{10} = 1$, F 为 C 的上焦点, A 为 C 的右顶点, P 是 C 上位于第一象限内的动点, 则四边形 $OAPF$ 的面积的最大值为_____。

题 10 (2016.7). 双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 作一直线与双曲线 C 的右半支交于点 P, Q , 使得 $\angle F_1PQ = 90^\circ$, 则 $\triangle FPQ$ 的内切圆半径是_____。

题 11 (2016.11). 如图所示, 在平面直角坐标系中, F 是 x 轴正半轴上的一个动点, 以 F 为焦点、 O 为顶点作抛物线 C , 设 P 是第一象限内 C 上的一点, Q 是 x 轴负半轴上一点, 使得 PQ 为 C 的切线, 且 $|PQ| = 2$, 圆 C_1, C_2 均与直线 OP 相切于点 P , 且均与 x 轴相切, 求点 F 的坐标, 使圆 C_1 与 C_2 的面积之和取到最小值。



题 12 (2015.6). 在平面直角坐标系中, 点集 $K = \{(x, y) | (|x| + 3|y| - 6)(3|x| + |y| - 6) \leq 0\}$ 所对应的平面区域的面积为_____。

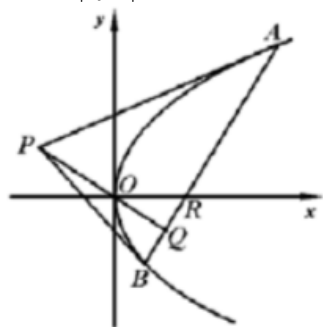
题 13 (2015.11). 在平面直角坐标系中, F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左右焦点, 设不经过焦点 F_1 的直线 l 与椭圆交于两个不同的点 A, B , 焦点 F_2 到直线 l 的距离为 d . 如果直线 AF_1, l, BF_1 的斜率依次成等差数列, 求 d 的取值范围.

题 14 (2014.6). 设椭圆 Γ 的两个焦点是 F_1, F_2 , 过点 F_1 的直线与 Γ 交于点 P, Q . 若 $|PF_2| = |F_1F_2|$, 且 $3|PF_1| = 4|QF_1|$, 则椭圆 Γ 的短轴与长轴的比值为_____.

题 15 (2014.9). 平面直角坐标系中, P 是不在 x 轴上的一个动点, 满足条件过 P 可作抛物线 $y^2 = 4x$ 的两条切线, 两切点连线 l_P 与 PO 垂直. 设直线 l_P 与直线 PO, x 轴的交点分别为 Q, R .

(1) 证明 R 是一个定点;

(2) 求 $\frac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值



题 16 (2013.2). 在平面直角坐标系中, 点 A, B 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上, 满足 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -4$, F 是抛物线的焦点, 则 $S_{\triangle OFA} \cdot S_{\triangle OFB} =$ _____.

题 17 (2013.10). 在平面直角坐标系中, 椭圆的方程为 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, A_1, A_2 分别为椭圆的左、右顶点, F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, P 为椭圆上不同于 A_1 和 A_2 的任意一点, 若平面中两个点 Q, R 满足 $QA_1 \perp PA_1, QA_2 \perp PA_2, RF_1 \perp PF_1, RF_2 \perp PF_2$, 确定线段 QR 的长度与 b 的大小关系, 并给出证明.

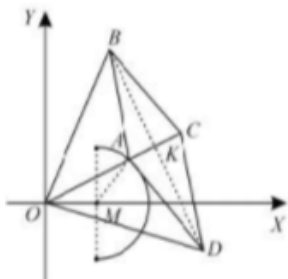
题 18 (2012.1). 设 P 是函数 $y = x + \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图像上任意一点, 过点 P 分别向直线 $y = x$ 和 y 轴作垂线垂足分别为 A, B , 则 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的值是_____.

题 19 (2012.4). 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , A, B 是抛物线上的两个动点, 且满足 $\angle AFB = \frac{\pi}{3}$, 设线段 AB 的中点 M 在 l 上的投影为 N , $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值是_____.

题 20 (2012.11). 在平面直角坐标系中, 菱形 $ABCD$ 的边长为 4, 且 $|OB| = |OD| = 6$

(1) 求证: $|OA| \cdot |OC|$ 为定值;

(2) 当点 A 在半圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 4 (2 \leq x \leq 4)$ 上运动时, 求点 C 的轨迹.



题 21 (2011.7). 直线 $x - 2y - 1 = 0$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, C 为抛物线上的一点, $\angle ACB = 90^\circ$, 则点 C 的坐标为_____.

题 22 (2011.11). 作斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线与椭圆 $C: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 交于 A, B 两点 (如图所示), 且 $P(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 在直线 l 的左上方

(1) 证明: $\triangle PAB$ 的内切圆的圆心在一条定直线上;

(2) 若 $\angle APB = 60^\circ$, 求 $\triangle PAB$ 的面积。

题 23 (2010.3). 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的右半支与直线 $x = 100$ 围成的区域内部 (不含边界) 整点 (纵横坐标均为整数的点) 的个数是_____。

题 24 (2010.10). 已知抛物线 $y^2 = 6x$ 上的两个动点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$, 其中 $x_1 \neq x_2$ 且 $x_1 + x_2 = 4$ 。线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 C , 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

题 25 (2009.2). 已知直线 $L: x + y - 9 = 0$ 和圆 $M: 2x^2 + 2y^2 - 8x - 8y - 1 = 0$, 点 A 在直线 L 上, B, C 为圆 M 上两点, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 45^\circ$, AB 过圆心 M , 则点 A 横坐标范围_____。

题 26 (2009.3). 在坐标平面上有两个区域 M 和 N , M 为 $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq x \\ y \leq 2 - x \end{cases}$, N 是随 t 变化的区域, 它由不等式 $t \leq x \leq t + 1$ 所确定, t 的取值范围是 $0 \leq t \leq 1$, 则 M 和 N 的公共面积是函数_____。

题 27 (2009.5). 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上任意两点 P, Q , 若 $OP \perp OQ$, 则乘积 $|PO||OQ|$ 的最小值为_____。

题 28 (2009.9). 设直线 $y = kx + m$ (其中 k, m 为整数) 与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 交于不同两点 A, B , 与双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 交于不同两点 C, D , 问是否存在直线 l , 使得向量 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$, 若存在, 指出这样的直线有多少条? 若不存在, 请说明理由