

09-21 年数列

题 1 (2021.1). 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{2021} = a_{20} + a_{21} = 1$, 则 a_1 的值为_____。

题 2 (2020.1). 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_9 = 13, a_{13} = 1$, 则 $\log_{a_1} 13$ 的值为_____。

题 3 (2018.8). 设整数数列 a_1, a_2, \dots, a_{10} , 满足 $a_{10} = 3a_1, a_2 + a_8 = 2a_5$, 且 $a_i + 1 \in \{1 + a_i, 2 + a_i\}, i = 1, 2, \dots, 9$, 则这样的数列的个数为_____。

题 4 (2018.10). 已知实数列 a_1, a_2, \dots , 满足: 对任意正整数 n , 有 $a_n(2S_n - a_n) = 1$ 。其中 S_n 表示前 n 项和。证明:

(1) 对任意正整数 n , 有 $a_n < 2\sqrt{n}$;

(2) 对任意正整数 n , 有 $a_n a_{n+1} < 1$ 。

题 5 (2017.8). 设两个严格递增的正整数数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足: $a_{10} = b_{10} < 2017$, 对任意正整数 n , 有 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, b_{n+1} = 2b_n$, 则 $a_1 + b_1$ 的所有可能值为_____。

题 6 (2014.4). 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2(n+2)}{n+1}a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $\frac{a_{2014}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2013}} =$ _____。

题 7 (2013.8). 已知数列 $\{a_n\}$ 共 9 项, 其中 $a_1 = a_9 = 1$, 且对每个 $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, 均有 $\frac{a_{i+1}}{a_i} \in \{2, 1, -\frac{1}{2}\}$, 则这样的数列个数为_____。

题 8 (2013.9). 给定正整数数列 $\{x_n\}$ 满足 $S_n \geq 2S_{n-1}$, 证明: 存在常数 $C > 0$, 使得 $x_n \geq C \cdot 2^n$

题 9 (2012.10). 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非零实数, 且对于任意正整数 n 都有 $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$

(1) 当 $n = 3$ 时, 求所有满足条件的三项组成的数列 a_1, a_2, a_3 ;

(2) 是否存在满足条件的无穷数列 $\{a_n\}$, 使得 $a_{2013} = -2012$?

题 10 (2011.8). 已知 $a_n = C_{200}^n \cdot (\sqrt{6})^{200-n} (n = 1, 2, \dots, 95)$, 则数列 $\{a_n\}$ 中的整数项个数为_____。

题 11 (2011.10). 已知数列满足: $a_1 = 2t - 3 (t \in \mathbb{R}, t \neq \pm 1), a_{n+1} = \frac{(2t^{n+1} - 3)a_n + 2(t-1)t^n - 1}{a_n + 2t^n - 1}$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $t > 0$, 试比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小。

题 12 (2010.4). 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 其中 $a_1 = 3, b_1 = 1, a_2 = b_2, 3a_5 = b_3$, 且存在常数 α, β 使得对每一个正整数 n 都有 $a_n = \log_\alpha b_n + \beta$, 则 $\alpha + \beta =$ _____。

题 13 (2009.10). 已知 $p, q (q \neq 0)$ 是实数, 方程 $x^2 - px + q = 0$ 有两个实数根 α, β , 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = p, a_2 = p^2 - q, a_n = pa_{n-1} - qa_{n-2} (n \geq 3)$

(1) 求数列的通项公式 (用 α, β 表示)

(2) 若 $p = 1, q = \frac{1}{4}$, 求 a_n 的前 n 项和。