

09-21 年集合与组合计数部分

题 1 (2021.2). 设集合  $A = \{1, 2, m\}$ , 其中  $m$  为实数, 令  $B = \{a^2 | a \in A\}$ ,  $C = A \cap B$ , 若  $C$  的所有元素之和为 6, 则  $C$  的所有元素之积为\_\_\_\_\_。

题 2 (2021.8). 设有理数  $r = \frac{p}{q} \in (0, 1)$ , 其中  $p, q$  为互素的正整数, 且  $pq$  整除 3600, 这样的有理数  $r$  的个数为\_\_\_\_\_。

题 3 (2020.8). 现有 10 张卡片, 每张卡片写有 1,2,3,4,5 中两个不同的数, 且任意两张卡片上的数不完全相同, 将这 10 张卡片放入标号为 1,2,3,4,5 的五个盒子中, 规定写有  $i, j$  的卡片只能放在  $i$  号或  $j$  号盒子中, 一种放法称为”好的”, 如果 1 号盒子中的卡片数多于其他每个盒子中的卡片数, 则”好的”放法共有 \_\_\_\_\_ 种。

题 4 (2019.2). 若实数集合  $\{1, 2, 3, x\}$  的最大元素和最小元素之差等于该集合的所有元素之和, 则  $x$  的值为 \_\_\_\_\_。

题 5 (2019.8). 将 6 个数 2,0,1,9,20,19 按任意次序排成一行, 拼成一个 8 位数 (首位不为 0), 则产生的不同的 8 位数个数为 \_\_\_\_\_。

题 6 (2018.1). 设集合  $A = \{1, 2, \dots, 99\}$ ,  $B = \{2x | x \in A\}$ ,  $C = \{x | 2x \in A\}$ , 则  $B \cap C =$  \_\_\_\_\_。

题 7 (2017.4). 若一个三位数中任意两个相邻数码的差均不超过 1, 则称其为”平稳数”, 平稳数的个数为 \_\_\_\_\_。

题 8 (2016.8). 设  $a_1, a_2, a_3, a_4$  是 1,2, ..., 100 中的 4 个互不相同的数, 满足

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) = (a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4)^2$$

则这样的有序数组  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  的个数为 \_\_\_\_\_。

题 9 (2015.8). 对四位数  $\overline{abcd}$  ( $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9$ ), 若  $a > b, b < c, c > d$ , 则称  $\overline{abcd}$  为  $p$  类数, 若  $a < b, b > c, c < d$ , 则称  $\overline{abcd}$  为  $Q$  类数, 用  $N(P), N(Q)$  分别表示  $p$  类数和  $Q$  类数的个数, 则  $N(P) - N(Q) =$  \_\_\_\_\_。

题 10 (2015.10). 设  $a_1, a_2, a_3, a_4$  是 4 个有理数, 使得  $\{a_i a_j | 1 \leq i < j \leq 4\} = \{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\}$ , 求  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  的值。

题 11 (2014.2). 设集合  $\{\frac{3}{a} + b | 1 \leq a \leq b \leq 2\}$  中的最大元素与最小元素为  $M, m$ , 则  $M - m =$  \_\_\_\_\_。

题 12 (2013.1). 设  $A = \{2, 0, 1, 3\}$ , 集合  $B = \{x | -x \in A, 2 - x^2 \notin A\}$ , 则集合  $B$  中所有元素的和为 \_\_\_\_\_。

题 13 (2011.1). 设集合  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , 若  $A$  的所有三个元素之和组成的集合为  $B = \{-1, 3, 5, 8\}$ , 则集合  $A =$  \_\_\_\_\_。

题 14 (2011.5). 现安排 7 名同学去参加 5 个运动项目, 要求甲、乙两同学不能参加一个项目, 每个项目都有人参加, 每人只参加一个项目, 则满足上述要求的不同安排方案数为 \_\_\_\_\_。

题 15 (2010.8). 方程  $x + y + z = 2010$  满足  $x \leq y \leq z$  的正整数解的个数为 \_\_\_\_\_。

题 16 (2009.7). 一个由若干行数字组成的数表, 从第二行起每一行中的数字均等于其肩上两个数字之和, 最后一行仅有一个数, 第一行是前 100 个正整数按从小到大排成的行, 则最后一行的数是 \_\_\_\_\_。