

题 1 (2012.1). 设  $P$  是函数  $y = x + \frac{2}{x} (x > 0)$  的图像上任意一点, 过点  $P$  分别向直线  $y = x$  和  $y$  轴作垂线垂足分别为  $A, B$ , 则  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的值是\_\_\_\_\_。

题 2 (2012.2). 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 且满足  $a \cos B - b \cos A = \frac{3}{5}c$ , 则  $\frac{\tan A}{\tan B} =$ \_\_\_\_\_。

题 3 (2012.3). 设  $x, y, z \in [0, 1]$ , 则  $M = \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|} + \sqrt{|z-x|}$  的最大值是\_\_\_\_\_。

题 4 (2012.4). 抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 准线为  $l$ ,  $A, B$  是抛物线上的两个动点, 且满足  $\angle AFB = \frac{\pi}{3}$ , 设线段  $AB$  的中点  $M$  在  $l$  上的投影为  $N$ ,  $\frac{|MN|}{|AB|}$  的最大值是\_\_\_\_\_。

题 5 (2012.5). 设同底的两个正三棱锥  $P-ABC$  和  $Q-ABC$  内接于同一个球, 若正三棱锥  $P-ABC$  的侧面与底面所成角为  $45^\circ$ , 则三棱锥  $Q-ABC$  的侧面与底面所成角的正切值为\_\_\_\_\_。

题 6 (2012.6). 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^2$ , 若对任意的  $x \in [a, a+2]$ , 不等式  $f(x+a) \geq 2f(x)$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

题 7 (2012.7). 满足  $\frac{1}{4} < \sin \frac{\pi}{n} < \frac{1}{3}$  的所有正整数  $n$  的和为\_\_\_\_\_。

题 8 (2012.8). 某情报站有  $A, B, C, D$  四种互不相同的密码, 每周使用其中的一种密码, 且每周都是从上周未使用的三种密码中等可能地随机选用一种设第 1 周使用  $A$  种密码, 那么第 7 周也使用  $A$  种密码\_\_\_\_\_。

题 9 (2012.9). 已知函数  $f(x) = a \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x + a - \frac{3}{a} + \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

(1) 若对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 都有  $f(x) \leq 0$ , 求  $a$  的取值范围

(2) 若  $a \geq 2$ , 且存在  $x \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(x) \leq 0$ , 求  $a$  的取值范围

题 10 (2012.10). 已知数列  $\{a_n\}$  的各项均为非零实数, 且对于任意正整数  $n$  都有  $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$

(1) 当  $n = 3$  时, 求所有满足条件的三项组成的数列  $a_1, a_2, a_3$ ;

(2) 是否存在满足条件的无穷数列  $\{a_n\}$ , 使得  $a_{2013} = -2012$ ?

题 11 (2012.11). 在平面直角坐标系中, 菱形  $ABCD$  的边长为 4, 且  $|OB| = |OD| = 6$

(1) 求证:  $|OA| \cdot |OC|$  为定值;

(2) 当点  $A$  在半圆  $M: (x-2)^2 + y^2 = 4 (2 \leq x \leq 4)$  上运动时, 求点  $C$  的轨迹.