

题 1 (2016.1). 设实数 a 满足 $a < 9a^3 - 11a < |a|$, 则 a 的取值范围为 _____。

题 2 (2016.2). 设复数 z, w 满足 $|z| = 3, (z + \bar{w})(\bar{z} - w) = 7 + 4i$, 则 $(z + 2\bar{w})(\bar{z} - 2w)$ 的模为 _____。

题 3 (2016.3). 正实数 u, v, w 均不等于 1, 若 $\log_u vw + \log_v w = 5, \log_v u + \log_w v = 3$, 则 $\log_w u$ 的值为 _____。

题 4 (2016.4). 袋子 A 中装有 2 张 10 元纸币和 3 张 1 元纸币, 袋子 B 中装有 4 张 5 元纸币和 3 张 1 元纸币。现随机从两个袋子中各取出两张纸币, 则 A 中剩下的纸币面值之和大于 B 中剩下的纸币面值之和的概率为 _____。

题 5 (2016.5). 设 P 是一圆锥的顶点, A, B, C 是其底面圆周上的三点, 满足 $\angle ABC = 90^\circ$, M 为 AP 的中点, 若 $AB = 1, AC = 2, AP = \sqrt{2}$, 则二面角 $M - BC - A$ 的大小为 _____。

题 6 (2016.6). 设函数 $f(x) = \sin^4 \frac{kx}{10} + \cos^4 \frac{kx}{10}$, 其中 k 是一个正整数, 若对任意实数 a , 均有 $\{f(x) | a < x < a + 1\} = \{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$, 则 k 的最小值为 _____。

题 7 (2016.7). 双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, 左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 作一直线与双曲线 C 的右半支交于点 P, Q , 使得 $\angle F_1 PQ = 90^\circ$, 则 $\triangle FPQ$ 的内切圆半径是 _____。

题 8 (2016.8). 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是 $1, 2, \dots, 100$ 中的 4 个互不相同的数, 满足

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4)^2$$

则这样的有序数组 (a_1, a_2, a_3, a_4) 的个数为 _____。

题 9 (2016.9). 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$, 求 $\sin C$ 的最大值。

题 10 (2016.10). 已知 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的奇函数, $f(1) = 1$, 且对任意 $x < 0$, 均有 $f(\frac{x}{x-1}) = xf(x)$, 求

$$f(1)f(\frac{1}{100}) + f(\frac{1}{2})f(\frac{1}{99}) + \dots + f(\frac{1}{50})f(\frac{1}{51})$$

的值。

题 11 (2016.11). 在平面直角坐标系中, F 是 x 轴正半轴上的一个动点, 以 F 为焦点、 O 为顶点作抛物线 C , 设 P 是第一象限内 C 上的一点, Q 是 x 轴负半轴上一点, 使得 PQ 为 C 的切线, 且 $|PQ| = 2$, 圆 C_1, C_2 均与直线 OP 相切于点 P , 且均与 x 轴相切, 求点 F 的坐标, 使圆 C_1 与 C_2 的面积之和取到最小值。