

题 1 (2018.1). 设集合 $A = \{1, 2, \dots, 99\}$, $B = \{2x | x \in A\}$, $C = \{x | 2x \in A\}$, 则 $B \cap C =$ _____。

题 2 (2018.2). 设点 P 到平面 α 的距离为 $\sqrt{3}$, 点 Q 在平面 α 上, 使得直线 PQ 与 α 所成角不小于 30° 且不大于 60° , 则这样的点 Q 所构成的区域的面积为_____。

题 3 (2018.3). 将 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 随机排成一行, 记为 a, b, c, d, e, f , 则 $abc + def$ 是偶数的概率为_____。

题 4 (2018.4). 在平面直角坐标系中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 椭圆 C 的弦 ST 与 UV 分别平行于 x 轴与 y 轴, 且相交于点 P . 已知线段 PU, PS, PV, PT 的长分别为 $1, 2, 3, 6$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为_____。

题 5 (2018.5). 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上以 2 为周期的偶函数, 在区间 $[0, 1]$ 上严格递减, 且满足 $f(\pi) = 1, f(2\pi) = 2$, 则不等式组 $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq f(x) \leq 2 \end{cases}$ 的解集为 _____。

题 6 (2018.6). 设复数 z 满足 $|z| = 1$, 使得关于 x 的方程 $zx^2 + 2\bar{z}x + 2 = 0$ 有实根, 则这样的复数 z 的和为_____。

题 7 (2018.7). 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, 则 $\sin \angle BAC =$ _____。

题 8 (2018.8). 设整数数列 a_1, a_2, \dots, a_{10} , 满足 $a_{10} = 3a_1, a_2 + a_8 = 2a_5$, 且 $a_i + 1 \in \{1 + a_i, 2 + a_i\}, i = 1, 2, \dots, 9$, 则这样的数列的个数为_____。

题 9 (2018.9). 已知定义在 \mathbb{R}^+ 上的函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} |\log_3 x - 1|, & 0 < x \leq 9, \\ 4 - \sqrt{x}, & x > 9 \end{cases}$$

设 a, b, c 是三个互不相同的实数, 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$, 求 abc 的取值范围。

题 10 (2018.10). 已知实数列 a_1, a_2, \dots , 满足: 对任意正整数 n , 有 $a_n(2S_n - a_n) = 1$ 。其中 S_n 表示前 n 项和。证明:

- (1) 对任意正整数 n , 有 $a_n < 2\sqrt{n}$;
- (2) 对任意正整数 n , 有 $a_n a_{n+1} < 1$ 。

题 11 (2018.11). 在平面直角坐标系中, 设 AB 是抛物线 $y^2 = 4x$ 的过点 $F(1, 0)$ 的弦, $\triangle AOB$ 的外接圆交抛物线于点 P (不同于点 O, A, B)。若 PF 平分 $\angle APB$ 。求 $|PF|$ 的所有可能值。