

题 1 (2014.1). 若正数  $a, b$  满足  $2 + \log_2 a = 3 + \log_3 b = \log_6(a + b)$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的值为 \_\_\_\_\_。

题 2 (2014.2). 设集合  $\{\frac{3}{a} + b | 1 \leq a \leq b \leq 2\}$  中的最大元素与最小元素为  $M, m$ , 则  $M - m =$  \_\_\_\_\_。

题 3 (2014.3). 若函数  $f(x) = x^2 + a|x - 1|$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 则实数  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_。

题 4 (2014.4). 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2(n+2)}{n+1}a_n (n \in \mathbb{N}^*)$ , 则  $\frac{a_{2014}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2013}} =$  \_\_\_\_\_。

题 5 (2014.5). 正四棱锥  $P-ABCD$  中, 侧面是边长为 1 的正三角形,  $M, N$  是  $AB, AC$  的中点, 则异面直线  $MN$  与  $PC$  之间的距离为 \_\_\_\_\_。

题 6 (2014.6). 设椭圆  $\Gamma$  的两个焦点是  $F_1, F_2$ , 过点  $F_1$  的直线与  $\Gamma$  交于点  $P, Q$ 。若  $|PF_2| = |F_1F_2|$ , 且  $3|PF_1| = 4|QF_1|$ , 则椭圆  $\Gamma$  的短轴与长轴的比值为 \_\_\_\_\_。

题 7 (2014.7). 设等边三角形  $ABC$  的内切圆半径为 2, 圆心为  $I$ , 若点  $P$  满足  $PI = 1$ , 则  $\triangle APB$  和  $\triangle APC$  的面积之比最大值为 \_\_\_\_\_。

题 8 (2014.9). 平面直角坐标系中,  $P$  是不在  $x$  轴上的一个动点, 满足条件过  $P$  可作抛物线  $y^2 = 4x$  的两条切线, 两切点连线  $l_P$  与  $PO$  垂直。设直线  $l_P$  与直线  $PO, x$  轴的交点分别为  $Q, R$ 。

(1) 证明  $R$  是一个定点;

(2) 求  $\frac{|PQ|}{|QR|}$  的最小值。

题 9 (2014.10). 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{\pi}{6}, a_{n+1} = \arctan(\sec a_n)$ , 求正整数  $m$  使得

$$\sin a_1 \sin a_2 \cdots \sin a_m = \frac{1}{100}$$

题 10 (2014.11). 确定所有的复数  $\alpha$ , 使得对任意复数  $z_1, z_2 (|z_1|, |z_2| < 1, z_1 \neq z_2)$ , 均有

$$(z_1 + \alpha)^2 + \alpha \bar{z}_1 \neq (z_2 + \alpha)^2 + \alpha \bar{z}_2$$