

题 1 (2020.1). 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_9 = 13, a_{13} = 1$, 则 $\log_{a_1} 13$ 的值为_____.

题 2 (2020.2). 在椭圆 Γ 中, A 为长轴的一个端点, B 为短轴的一个端点, F_1, F_2 为两个焦点. 若 $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} + \overrightarrow{BF_1} \cdot \overrightarrow{BF_2} = 0$, 则 $\frac{|AB|}{|F_1F_2|}$ 的值为_____.

题 3 (2020.3). 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = x + \frac{100}{x}$ 在区间 $(0, a]$ 上的最小值为 m_1 , 在 $[a, +\infty)$ 上的最小值为 m_2 . 若 $m_1 m_2 = 2020$, 则 a 的值为_____.

题 4 (2020.4). 设 z 为复数, 若 $\frac{z-2}{z-i}$ 为实数, 则 $|z+3|$ 的最小值为_____.

题 5 (2020.5). 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6, BC = 4$, 边 AC 的中线长为 $\sqrt{10}$, 则 $\sin^6 \frac{A}{2} + \cos^6 \frac{A}{2}$ 的值为_____.

题 6 (2020.6). 正三棱锥 $P-ABC$ 的所有棱长为 1, L, M, N 分别为棱 PA, PB, PC 的中点, 则该正三棱锥的外接球被平面 LMN 所截的平面面积为_____.

题 7 (2020.7). 设 $a, b > 0$, 满足: 关于 x 的方程 $\sqrt{|x|} + \sqrt{|x+a|} = b$ 恰有三个不同的解 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3 = b$, 则 $a+b =$ _____.

题 8 (2020.8). 现有 10 张卡片, 每张卡片写有 1, 2, 3, 4, 5 中两个不同的数, 且任意两张卡片上的数不完全相同, 将这 10 张卡片放入标号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个盒子中, 规定写有 i, j 的卡片只能放在 i 号或 j 号盒子中, 一种放法称为 "好的", 如果 1 号盒子中的卡片数多于其他每个盒子中的卡片数, 则 "好的" 放法共有 _____ 种.

题 9 (2020.9). 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 $\cos B + \sqrt{2} \cos C$ 的取值范围.

题 10 (2020.10). 对正整数 n 以及实数 $x (0 \leq x < n)$, 定义 $f(n, x) = (1 - \{x\})C_n^{[x]} + \{x\}C_n^{[x]+1}$, 若整数 $m, n \geq 2$ 满足

$$f(m, \frac{1}{n}) + f(m, \frac{2}{n}) + \cdots + f(m, \frac{mn-1}{n}) = 123$$

求 $f(n, \frac{1}{m}) + f(n, \frac{2}{m}) + \cdots + f(n, \frac{mn-1}{m})$.

题 11 (2020.11). 在平面直角坐标系中, 点 A, B, C 在双曲线 $xy = 1$ 上满足 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最小值.